



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **PROPAGAÇÃO DA ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS COM QUATÉRNIONS**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

**Leandro Teixeira Ferreira de Sene (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: leandrodesene@yahoo.com**

**Dr. Valcir Orlando (CCS/INPE, Orientador)  
E-mail: valcir@ccs.inpe.br**

**Prof<sup>ª</sup>. Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi (DMA/UNESP, Co-orientadora)  
E-mail: cecilia@feg.unesp.br**

Julho de 2007

**Relatório corrigido e aprovado.**

---

**Valcir Orlando**  
**Orientador**

---

**Maria Cecília F. P. S. Zanardi**  
**Co-orientadora**

---

**Leandro T. F. de Sene**  
**Orientado**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao CONSELHO NACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO - CNPq  
pelo apoio financeiro recebido através da Bolsa de Iniciação Científica junto ao  
Programa PIBIC do INPE.

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é analisar a influência conjunta do torque magnético residual, do torque magnético devido às correntes de Foucault e o do torque de gradiente de gravidade na atitude de satélites artificiais, utilizando o modelo de vetor de dipolo para o campo magnético terrestre e os quatérnions para representar a sua orientação espacial. Aplicações são realizadas para satélites estabilizados por rotação, mostrando as variações temporais na ascensão reta e declinação do eixo de rotação e na velocidade de rotação do satélite. O torque gradiente de gravidade é causado pela diferença na intensidade e direção da força gravitacional com que diferentes partes do satélite são atraídas pela Terra. O torque magnético residual ocorre devido à interação entre o campo magnético terrestre e o momento magnético do satélite resultante da soma dos momentos individuais gerados pelos dispositivos eletrônicos a bordo do satélite. O torque magnético devido às correntes de Foucault ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam pelas superfícies metálicas do satélite. As componentes de cada torque são determinadas no sistema principal de inércia do satélite, através da matriz de rotação em termos dos quatérnions e dos elementos orbitais. As equações do movimento são descritas pelas equações cinemáticas dos quatérnions e pelas equações de Euler, nas quais são incluídas conjuntamente as componentes dos torques. A solução numérica das equações é fornecida pelo método de Runge - Kutta de 8ª ordem, com aplicações para os satélites brasileiros de coleta de dados, SCD1 e SCD2. Pelos resultados obtidos observa-se a contribuição conjunta dos três torques na precessão e deriva do eixo de rotação do satélite e a na magnitude da velocidade de rotação do satélite.

# ATTITUDE PROPAGATION OF ARTIFICIAL SATELLITE WITH QUATERNIONS, INCLUDING MAGNETIC TORQUES AND GRAVITY GRADIENT TORQUE

## ABSTRACT

The goal of this work is to analyze the influence of external torques in attitude of an artificial satellite, using the quaternions to describe the satellite attitude. The external torque considered are the gravity gradient torque, the residual magnetic torque and the eddy currents torques, with dipole vector model used to describe the geomagnetic field. Applications are developed to spin stabilized satellite and they show the variations in the right ascending and declination of the satellite spin axes and the variations in the magnitude of the satellite spin velocity. A gravity gradient torque is created by the difference of the Earth gravity force direction and intensity acting on each satellite mass element. Magnetic torques results from the interaction between the spacecraft's residual magnetic field and the geomagnetic field, and in this work it is analyzed the magnetic disturbance torques caused by the spacecraft magnetic moments and eddy currents. In this work, the components of each torque are obtained in principal reference system, using the rotation matrix in terms of the attitude quaternions and orbital elements. The equations of motion are given by the cinematic equations of the quaternions and by the Euler equations, where the components of each torque are included individually. The numerical solution are gotten by the 8<sup>th</sup> Runge-Kutta method for the data for the Brazilian Satellite, SCD1 and SCD2. The results show the contributions of each torque in the precession and drift of the satellite spin axis and in the magnitude of the satellite spin velocity. It possible to observe that the residual torque does not affect the spin velocity and the principal influence of the eddy currents torque is the decay of the spin velocity.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE TABELAS.....	9
LISTA DE SÍMBOLOS.....	10
LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS.....	12
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	13
CAPÍTULO 2 - DESENVOLVIMENTO.....	16
2.1 - Representação de atitude.....	16
2.1.1 - Sistemas de coordenadas.....	16
2.1.2 - Matriz de atitude.....	18
2.1.3 - Ângulos de Euler.....	20
2.1.4 - Representação da atitude em termos dos quatérnions .....	21
2.2 - Elementos orbitais .....	23
2.3 - Equações do movimento.....	24
2.3.1 - Equações de Euler.....	24
2.3.2 - Equações cinemáticas em termos dos quatérnions.....	25
2.4 - Satélites estabilizados por rotação.....	26
2.5 - Torque gradiente de gravidade.....	28
2.5.1 - Força gravitacional e suas componentes.....	28
2.5.2 - Torque gradiente de gravidade e suas componentes.....	31
2.6 - Torques magnéticos .....	37
2.6.1 - Campo magnético da terra.....	39
2.6.1.1 - Componentes do campo magnético terrestre no sistema equatorial.....	40
2.6.1.2 - Componentes do campo magnético terrestre no sistema do satélite.....	46
2.6.2 - Torque residual.....	47
2.6.3 - Torque devido às correntes de Foucault.....	48
2.7 - Aplicações e resultados.....	49
2.7.1 - Simulações para o satélite SCD1.....	51
2.7.1.1 - Resultados para a Ascensão Reta.....	51
2.7.1.2 - Resultados para a Declinação.....	54
2.7.1.3 - Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação.....	57
2.7.2 - Simulações para o satélite SCD2.....	60
2.7.2.1 - Resultados para a Ascensão Reta.....	60
2.7.2.2 - Resultados para a Declinação.....	63
2.7.2.3 - Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação.....	66
2.7.3 - Simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2.....	69
CAPÍTULO 3 - CONCLUSÃO.....	70

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....72

## LISTA DE FIGURAS

1.1 - Representação do sistema equatorial O'XYZ.....	17
2.1 - Representação da órbita de um satélite artificial, com alguns dos elementos orbitais.....	23
2.2 - Sistema Equatorial ( $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ ), orientação do eixo de rotação ( $\hat{k}$ ), ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação.....	26
2.3 - Esquematização da relação entre os elementos de massa do satélite e a Terra.....	28
2.4 - Sistema Magnético ( $Ox_m y_m z_m$ ) e Sistema Equatorial (OXYZ).....	41
2.5 - Evolução da ascensão reta do satélite SCD1 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	53
2.6 - Variação do erro para a ascensão reta do satélite SCD1, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	53
2.7 - Evolução da declinação do satélite SCD1 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	56
2.8 - Variação do erro para a declinação do satélite SCD1, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	56
2.9 - Evolução do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	59
2.10 - Variação do erro para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	59
2.11 - Evolução da ascensão reta do satélite SCD2 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	62
2.12 - Variação do erro para a ascensão reta do satélite SCD2, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	62
2.13 - Evolução da declinação do satélite SCD2 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	65
2.14 - Variação do erro para a declinação do satélite SCD2, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	65
2.15 - Evolução do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	68
2.16 - Variação do erro para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.....	68



## LISTA DE TABELAS

0.1 - Variações da ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	51
0.2 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	52
0.3 - Variações da declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	54
0.4 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	55
0.5 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	57
0.6 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	58
0.7 - Variações da ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	60
0.8 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	61
0.9 - Variações da declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	63
1.0 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	64
1.1 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	66
1.2 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	67
1.3 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2.....	69
1.4 - Diferença entre os resultados obtidos da simulação e os dados do CCS/Inpe.....	69

## LISTA DE SÍMBOLOS

a	- semi eixo maior
$\vec{B}$	- campo magnético terrestre local
e	- excentricidade
f	- anomalia verdadeira
I	- inclinação da órbita
$I_x, I_y$ e $I_z$	- momentos principais de inércia do satélite
$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$	- vetores unitários do sistema Inercial ou Equatorial
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	- vetores unitários no Sistema do Satélites
$\hat{i}_m, \hat{j}_m, \hat{k}_m$	- vetores unitários do Sistema Magnético
$l$ terrestre	- módulo do vetor do momento magnético do campo terrestre
$M_x, M_y$ e $M_z$	- componentes dos torques externos atuantes no satélite no sistema do satélite
$\vec{M}$	- soma dos momentos magnéticos individuais do satélite
M	- matriz de Atitude ou Matriz de Rotação
O	- centro de massa do Satélite
O'	- centro de massa da Terra
$O'x_my_mz_m$	- Sistema Magnético
OXYZ	- Sistema Equatorial
Oxyz	- Sistema do Satélite
OZ	- eixo de maior momento principal de inércia
O'XYZ	- Sistema Inercial
P	- coeficiente que depende da geometria do satélite e da condutividade do material.
p, q e r satélite.	- componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite.
$R_T$	- raio equatorial da Terra
$\vec{r}$	- vetor posição do centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra
w	- argumento do perigeu
W	- módulo da velocidade de rotação
WI	- velocidade de rotação no sistema equatorial
X, Y, Z	- coordenadas de um vetor no sistema inercial

$x, y, z$	- coordenadas de um vetor no sistema de eixos principais
$\alpha$	- ascensão reta do eixo de rotação
$\delta$	- declinação do eixo de rotação
$g_n^m, h_n^m$	- coeficientes Gaussianos
$P_n^m(\theta)$	- polinômios associados de Legendre
$\mu_0$	- permeabilidade do espaço livre
$\hat{k}_m$	- vetor unitário que descreve a direção do momento geomagnético
$\beta$ equatorial OZ	- inclinação do vetor de dipolo em relação ao eixo
$\eta$	- argumento do nodo ascendente do equador geomagnético
$\phi$	- ângulo de rotação
$\Omega$	- longitude do nodo ascendente

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

- UNESP - Universidade Estadual Paulista
- CCS - Centro de Controle de Satélites
- INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
- SCD1 - Primeiro Satélite de Coleta de Dados Brasileiro
- SCD2 - Segundo Satélite de Coleta de Dados Brasileiro
- CM - Centro de Massa
- TGG - Torque de Gradiente de Gravidade
- TA - Torque Aerodinâmico
- TRS - Torque de Radiação Solar Direta
- TM - Torque Magnético
- TI - Torque de Foucault

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A grande diversidade de missões espaciais com fins meteorológicos, de telecomunicação, de sensoriamento remoto e científico, entre outros, tem motivado as atividades de controle, propagação e determinação da atitude de satélites artificiais. Por este motivo, a interação entre fontes de campo magnético presentes no satélite e o campo magnético terrestre tem sido objeto de vários estudos.

A atitude de um satélite artificial representa o modo de sua orientação no espaço, sendo a propagação do seu movimento rotacional analisada, com o objetivo de se conhecer a atitude em qualquer instante, a partir de condições iniciais conhecidas, considerando torques externos atuantes sobre o satélite.

O enfoque principal deste trabalho é determinar uma solução numérica para as equações dinâmicas e cinemáticas que descrevem o movimento rotacional do satélite, quando a influência de torques externos é incluída nas equações dinâmicas. Os torques externos considerados são o torque de gradiente de gravidade, o torque magnético residual e o torque devido às correntes de Foucault, sendo que suas componentes são incluídas conjuntamente nas equações do movimento. O campo magnético da Terra é descrito pelo modelo de vetor de dipolo inclinado e a atitude do satélite descrita pelos quatérnions. Aplicações são realizadas para satélites estabilizados por rotação, considerando os dados dos satélites brasileiros de coleta de dados, SCD1 e SCD2.

O torque magnético residual ocorre principalmente devido aos momentos magnéticos individuais do satélite e ao campo magnético terrestre.

O torque magnético devido às correntes de Foucault ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam por suas superfícies metálicas. O principal efeito deste torque é o decaimento do módulo da velocidade de rotação do satélite.

O torque gradiente de gravidade é causado pela diferença na intensidade e direção da força gravitacional com que diferentes partes do satélite são atraídas pela Terra. As equações do movimento serão descritas pelas equações cinemáticas dos quatérnions e pelas equações de Euler, nas quais são incluídas as componentes dos torques para um satélite estabilizado por rotação.

Na integração das equações do movimento é utilizado o método de Runge - Kutta de 8ª ordem e são feitas simulações com dados reais dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2), considerando diferentes intervalos de tempo.

Comparações dos resultados obtidos com os dados reais destes satélites são também realizadas, considerando os dados fornecidos pelo Centro de Controle de Satélites (CCS), do INPE – São José dos Campos.

Este trabalho está dando continuidade a outros trabalhos já realizados por alunos de graduação e pós-graduação da FEG/UNESP. Salienta-se que a análise do movimento rotacional de satélites estabilizados por rotação foi analisada por Quirelli (2002), no qual é utilizado o modelo de vetor de dipolo para descrever o movimento rotacional, incluindo tanto o torque magnético residual quanto o torque magnético devido às correntes de Foucault. Real e Zanardi (2003) analisam as magnitudes dos torques magnéticos utilizando tanto o modelo de quadripolo quanto o modelo de dipolo para o campo magnético da Terra, com aplicações para satélites estabilizados por rotação. Rodrigues (2004) analisa a propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações de atitude, na ausência de torques externos, enfatizando a importância da utilização dos quatérnions. Zanardi e Rodrigues (2004) analisam a propagação da atitude de satélites artificiais utilizando quatérnion e incluindo o torque de gradiente de gravidade nas equações do movimento. Zanardi e Rodrigues (2004) também analisam a propagação da atitude de satélites artificiais utilizando quatérnion, mas incluindo o torque magnético residual médio. Teixeira (2005) analisa a propagação de atitude incluindo o torque devido às correntes de Foucault, também utilizando os quatérnions. Assim este trabalho está dando continuidade à propagação de atitude com quatérnions, enfatizando a influência conjunta do torque magnético devido às correntes de Foucault,

do torque magnético residual e do torque de gradiente de gravidade, realizando comparações da influência conjunta destes torques no módulo da velocidade de rotação do satélite e na ascensão reta e declinação do eixo de rotação do satélite.

## CAPÍTULO 2

### DESENVOLVIMENTO

#### 2.1 Representação de Atitude

A atitude de um satélite artificial está diretamente relacionada à sua orientação no espaço, ou seja, através da atitude pode-se conhecer a maneira como um veículo espacial se orienta. Para analisar a orientação do veículo espacial relacionamos um sistema de coordenadas fixo no centro de massa (CM) do satélite (o qual acompanha a orientação espacial e a rotação do satélite em torno de seu CM) e um sistema inercial, utilizando a matriz de rotação que relaciona estes dois sistemas. Os elementos da matriz de rotação podem ser obtidos por diferentes parametrizações, (MOORE e PISACANE, 1994; SHUSTER, 1993; ZANARDI E LOPES, 2000), tais como os ângulos de Euler, os quatérnions e as variáveis de Andoyer.

##### 2.1.1 Sistemas de coordenadas

No sistema Inercial (O'XYZ), a origem se encontra no centro de massa da Terra (O') com o eixo Z apontando para o Pólo Norte terrestre. O plano XY coincidente com o plano do Equador e o eixo X aponta para o ponto vernal que é a órbita aparente do Sol em torno da Terra, como mostra a FIGURA (1.1). Seus vetores unitários são aqui representados por  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ .



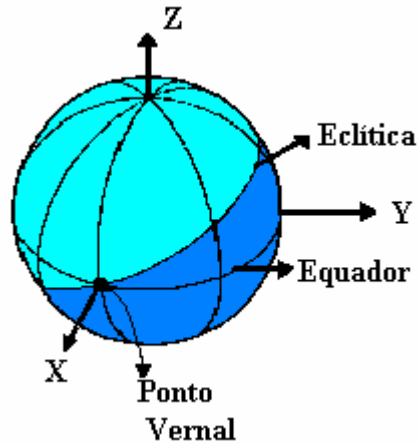


FIGURA 1.1 - Representação do sistema equatorial O'XYZ.

FONTE: Rodrigues (2002)

No Sistema Equatorial (OXYZ) a origem se encontra no centro de massa do satélite (O), apresentando eixos paralelos aos eixos do sistema inercial. É tido como um sistema auxiliar e seus vetores unitários são também representados por  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ .

Já no Sistema de Eixos Principais (Oxyz) a origem se encontra no centro de massa do satélite, sendo que seus eixos coincidem com as direções dos eixos principais de inércia do satélite, sendo seus vetores unitários representados por  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . É possível relacionar dois sistemas de coordenadas, sendo que para isso é necessário fazer uma mudança de coordenadas, utilizando a matriz de rotação.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Em que M é denominada Matriz de Atitude, ou Matriz de Rotação, X, Y, Z são as coordenadas de um vetor no sistema inercial e x, y, z são as coordenadas deste mesmo vetor no sistema de eixos principais.

Neste trabalho o sistema que acompanha a rotação do satélite é o sistema de eixos principais de inércia, Oxyz, aqui denominado de Sistema do Satélite, e o sistema inercial é o Sistema Equatorial, OXYZ.

### 2.1.2 Matriz de Atitude

A matriz de atitude (ou matriz de rotação) é obtida pelas componentes dos vetores unitários  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  no sistema equatorial, isto é:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= i_x \vec{I} + i_y \vec{J} + i_z \vec{K} \\ \vec{j} &= j_x \vec{I} + j_y \vec{J} + j_z \vec{K} \\ \vec{k} &= k_x \vec{I} + k_y \vec{J} + k_z \vec{K}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Sendo, portanto, a matriz de atitude M representada por:

$$M = \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z \\ j_x & j_y & j_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

Se a rotação ocorre apenas no eixo Z, obtém-se uma matriz em função dos cossenos diretores, associados ao ângulo de rotação  $\phi$ :

$$M = R(\hat{z}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{2.4}$$

As matrizes de rotação em x e y são obtidas da mesma maneira e estão representadas abaixo:

$$M = R(\hat{x}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix}\tag{2.5}$$

$$M = R(\hat{y}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Quando a rotação de um ângulo qualquer  $\Phi$  ocorre num eixo qualquer ( $\hat{n}$ ), a rotação é representada pela fórmula de Euler (SHUSTER, 1993):

$$M(\hat{n}, \phi) = \cos\Phi I + (1 - \cos\Phi)\hat{n}\hat{n}^t + \text{sen}\Phi[[\hat{n}]] \quad (2.7)$$

em que  $I$  é a matriz identidade 3x3, e  $[[\hat{n}]]$  é a matriz anti-simétrica com as componentes de  $\hat{n}$ . Considerando o versor  $\hat{n}$  com as seguintes componentes:

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Tem-se, então:

$$[[\hat{n}]] = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Assim pode-se obter as componentes da matriz de atitude associada a uma rotação num eixo qualquer  $\hat{n}$ :

$$M(\hat{n}, \Phi) = \begin{bmatrix} c + n_1^2(1-c) & n_2n_1(1-c) - n_3s & n_3n_1(1-c) - n_2s \\ n_2n_1(1-c) - n_3s & c + n_2^2(1-c) & n_3n_2(1-c) - n_1s \\ n_3n_1(1-c) - n_2s & n_3n_2(1-c) - n_1s & c + n_3^2(1-c) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Em que:  $c = \text{cosseno de } \Phi$  e  $s = \text{seno de } \Phi$ .

Conhecendo-se os elementos  $M(i, j)$  da matriz de rotação acima, podemos calcular o ângulo de rotação e o eixo de rotação, pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\cos \Phi = \frac{1}{2} (M(1,1) + M(2,2) + M(3,3) - 1) \quad (2.11)$$

e para  $\sin \Phi \neq 0$

$$\hat{n} = \frac{1}{2 \sin \Phi} \begin{bmatrix} M(2,3) - M(3,2) \\ M(3,1) - M(1,3) \\ M(1,2) - M(2,1) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Ângulos de Euler

A parametrização mais comum da matriz de atitude de satélites artificiais são os Ângulos de Euler, que consiste num conjunto de três rotações consecutivas, que são necessárias para passar de um sistema de coordenada para outro. Abaixo é representado, um exemplo de rotação de seqüência ZZZ:

Rotação  $\phi$  em OZ;

Rotação  $\theta$  em OX';

Rotação  $\psi$  em Oz.

A matriz B resultante dessas três rotações é representada por:

$$B = R(\hat{z}, \psi)R(\hat{x}, \theta)R(\hat{z}, \phi) = \begin{bmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & c\psi s\phi + s\psi c\theta c\phi & s\psi s\theta \\ -s\psi c\phi - c\psi c\theta s\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\theta c\phi & c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & -s\theta c\phi & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

em que:  $c = \text{cosseno}$ ,  $s = \text{seno}$  e  $R(\hat{z}, \psi)$ ,  $R(\hat{x}, \theta)$  e  $R(\hat{z}, \phi)$  são dadas pelas equações (2.4), (2.5) e (2.6).

Conhecendo-se os elementos da matriz, pode-se determinar os Ângulos de Euler, através das expressões abaixo:

$$\begin{aligned}
\theta &= \arccos ( B(3,3) ) \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq 180^\circ \\
\cos \phi &= \frac{B(3,2)}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad \sin \phi = \frac{B(3,1)}{\sin \theta} \quad \text{com } 0 \leq \phi \leq 360^\circ \\
\cos \psi &= \frac{B(2,3)}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad \sin \psi = \frac{B(1,3)}{\sin \theta} \quad \text{com } 0 \leq \psi \leq 360^\circ
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Um dos grandes problemas da utilização dos Ângulos de Euler é a geração de singularidade nas equações cinemáticas, as quais descrevem a taxa de variação dos ângulos de Euler para a seqüência ZXZ, conforme podemos verificar pela expressão abaixo (SHUSTER,1993):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi & -\cos \theta \cos \psi & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Em que p, q e r são as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite.

É possível verificar que, se  $\theta$  for 0 ou 180°, pode-se ter problemas de singularidade na equação (2.15). Esse é um dos problemas de se trabalhar com equações trigonométricas que envolvem funções trigonométricas no denominador.

#### 2.1.4 Representação da atitude em termos dos quatérnions

Para evitar as singularidades nas equações cinemáticas geradas pelos Ângulos de Euler, podemos utilizar os quatérnions. O quatérnion q é um vetor 4x1, sendo que as três primeiras componentes compõem a parte vetorial e a quarta componente a parte escalar do quatérnion:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

As componentes vetoriais ( $\vec{q}$ ) e escalar ( $q_4$ ) podem ser expressas em função do ângulo de rotação ( $\phi$ ) e do eixo de rotação  $\vec{n}$  :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{n} \quad e \quad q_4 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (2.17)$$

É possível facilmente provar que o módulo do quatérnion é 1, visto que  $\hat{n}$  é um vetor unitário na direção do vetor velocidade de rotação. A matriz de atitude em termos dos quatérnions é representada por (SHUSTER, 1993):

$$\mathbf{A} = (q_4^2 - |\vec{q}|^2)\mathbf{I} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_4[[\vec{q}]]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_4q_3) & 2(q_3q_1 - q_4q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_4q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_3q_2 + q_4q_1) \\ 2(q_3q_1 + q_4q_2) & 2(q_3q_2 - q_4q_1) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Em que:

$$[[\vec{q}]] = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se os elementos A (i, j) da matriz de atitude A, obtém-se, para  $q_4 \neq 0$ , as componentes dos quatérnions (SHUSTER, 1993):

$$\begin{aligned}
q_4 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + A(1,1) + A(2,2) + A(3,3)} \\
q_1 &= \frac{1}{4q_4} [A(2,3) - A(3,2)] \\
q_2 &= \frac{1}{4q_4} [A(3,1) - A(1,3)] \\
q_3 &= \frac{1}{4q_4} [A(1,2) - A(2,1)]
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

Para o caso em que  $q_4=0$ , pode-se obter as componentes do quatérnion de outras maneiras, visto que as equações (2.19) não são válidas neste caso.

## 2.2 Elementos orbitais

Um dos conceitos de grande importância quando trabalha-se com veículos espaciais é o dos elementos orbitais, os quais caracterizam a posição do satélite no espaço. São eles:  $a$  (semi-eixo maior da órbita),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação da órbita),  $\Omega$  (longitude do nodo ascendente),  $w$  (argumento do perigeu) e  $f$  (anomalia verdadeira). A FIGURA 2.1 apresenta a visualização desses elementos angulares  $I$ ,  $w$ ,  $\Omega$  e  $f$ .

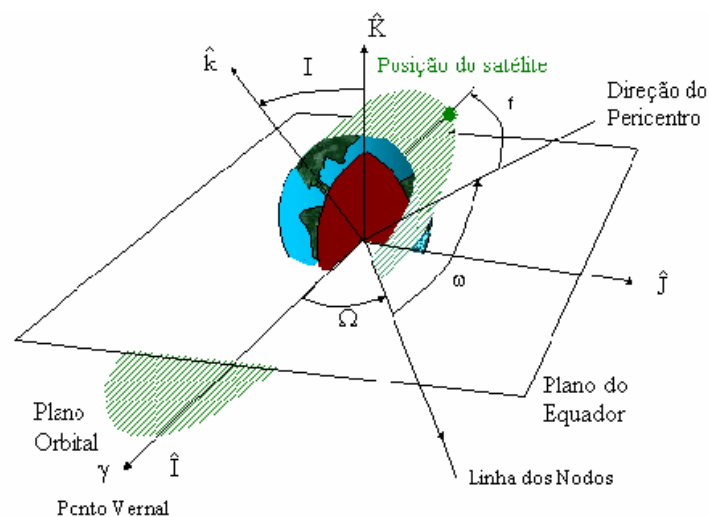


FIGURA 2.1 - Representação da órbita de um satélite artificial, com alguns dos elementos orbitais. FONTE: Bate (1971).

## 2.3 Equações do movimento

O movimento rotacional de um veículo espacial é descrito por equações dinâmicas e cinemáticas. As equações dinâmicas são também denominadas de equações de Euler e apresentam relações entre as componentes dos torques externos e a variação das componentes da velocidade de rotação. As equações cinemáticas apresentam as relações entre as componentes da velocidade e o quatérnio de atitude (ou os ângulos de Euler), que determinam a orientação do satélite no espaço.

Para determinar a variação da atitude com o tempo é necessário integrar estas equações. Os torques atuantes sobre o satélite dependem de uma forma não linear da orientação deste no espaço e assim estes dois grupos de equações se interagem, dificultando sua integração analítica.

Os torques ambientais atuantes sobre o veículo espacial são de pequena magnitude e como atuam permanentemente sobre o satélite precisam ser considerados e modelados cuidadosamente, de modo a melhor representar as condições ambientais as quais os veículos estão sujeitos. Neste trabalho os torques externos a serem incluídos são o torque de gradiente de gravidade os torques magnéticos devido às correntes de Foucault e residual.

### 2.3.1 Equações de Euler

As taxas de variação das componentes da velocidade de rotação podem ser obtidas a partir das equações de Euler (ZANARDI, 1990; WERTZ,1978):

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{M_x}{I_x} + \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) \cdot q \cdot r \\ \dot{q} &= \frac{M_y}{I_y} + \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \cdot p \cdot r \\ \dot{r} &= \frac{M_z}{I_z} + \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \cdot p \cdot q\end{aligned}\tag{2.20}$$



em que:  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos principais de inércia do satélite,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são as componentes dos torques externos atuantes no satélite no sistema do satélite e  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite.

### 2.3.2 Equações cinemáticas em termos dos quatérnions

As equações cinemáticas que descrevem a taxa de variação das componentes do quatérnion de atitude, devido à rotação do satélite, são dadas por (PISACANE; MOORE, 1994):

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \frac{1}{2} [p \cdot q_4 - q \cdot q_3 + r \cdot q_2] \\
 \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} [q \cdot q_4 - r \cdot q_1 + p \cdot q_3] \\
 \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} [r \cdot q_4 - p \cdot q_2 + q \cdot q_1] \\
 \dot{q}_4 &= \frac{1}{2} [p \cdot q_1 + q \cdot q_2 + r \cdot q_3]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Nas equações cinemáticas com os quatérnions, não existe a possibilidade de ocorrer um denominador nulo, o que evita as singularidades, como as que ocorrem nos Ângulos de Euler (ZANARDI, 2001; SHUSTER, 1993).

O torques aqui abordados, dependerão dos elementos da matriz de atitude que relaciona o sistema do satélite com o sistema equatorial. Deste modo, as equações (2.20) e (2.21) se interagem, formando um sistema de sete equações diferenciais. Na determinação da solução destas equações será considerado o movimento orbital descrito pelo movimento kepleriano (BATE et al., 1971). Quando não se consideram os torques externos atuantes no satélite artificial, as equações (2.20) e (2.21) tornam-se desacopladas. Neste caso, observa-se que o vetor velocidade de rotação descreve um movimento cônico em torno do eixo de simetria do veículo espacial (ZANARDI, 2005).

Quando o satélite não é simétrico, a componente da velocidade angular de rotação em  $Oz$  também terá uma variação periódica (ZANARDI, 2005).

## 2.4 Satélites estabilizados por rotação

Os satélites estabilizados por rotação possuem o eixo de rotação ao longo do eixo de maior momento principal de inércia (OZ) o que caracteriza uma estabilidade do movimento rotacional. As coordenadas esféricas que descrevem a atitude do satélite são o módulo da velocidade de rotação ( $W$ ), e a ascensão reta ( $\alpha$ ) e a declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite, como mostra a FIGURA 2.2.

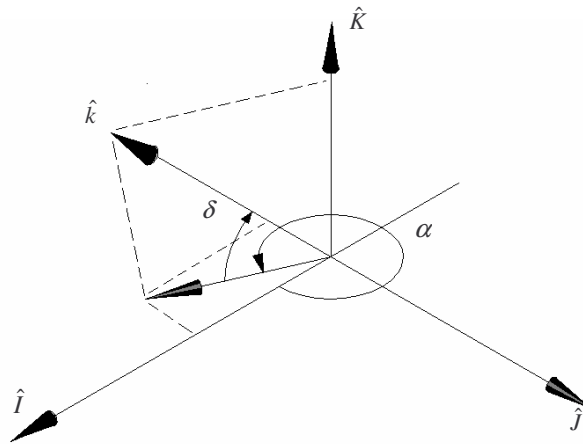


FIGURA 2.2 - Sistema Equatorial ( $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ ), orientação do eixo de rotação ( $\hat{k}$ ), ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação.

Estas coordenadas esféricas podem ser determinadas utilizando-se os quatérnions e as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite. Sejam a velocidade de rotação no sistema equatorial e no sistema do satélite dadas respectivamente por:

$$\vec{W}_I = P\hat{I} + Q\hat{J} + R\hat{K} \quad (2.22)$$

$$\vec{W} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k} \quad (2.23)$$

A velocidade de rotação no sistema equatorial se relaciona com a velocidade de rotação no sistema do satélite através da matriz de rotação em termos dos quatérnion dada em (2.18). Tem-se então:

$$\vec{W}_I = A^t \vec{W} \Rightarrow \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (2.24a)$$

Em que:

$$\begin{aligned} P &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)p + 2q(q_2q_1 - q_4q_3) + 2r(q_3q_1 + q_4q_2) \\ Q &= 2p(q_1q_2 + q_4q_3) + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)q + 2r(q_3q_2 - q_4q_1) \\ R &= 2p(q_3q_1 - q_4q_2) + 2q(q_3q_2 + q_4q_1) + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)r \end{aligned} \quad (2.24b)$$

O módulo da velocidade de rotação é dada por:

$$W = (p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

Pela FIGURA 2.2., em termos da ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação, as componentes da velocidade de rotação no sistema equatorial são dadas por:

$$\begin{aligned} P &= W \cos \delta \cos (360^\circ - \alpha) \Rightarrow P = W \cos \delta \cos \alpha \\ Q &= -W \cos \delta \sin (360^\circ - \alpha) \Rightarrow Q = W \cos \delta \sin \alpha \\ R &= W \sin \delta \end{aligned} \quad (2.26a)$$

De modo que a ascensão reta ( $\alpha$ ) e a declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite, são determinadas por:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{R}{W} \quad \text{com } 0 \leq \delta \leq 90^\circ \\ \cos \alpha &= \frac{P}{W \cos \delta} \quad \text{com } 0 \leq \alpha \leq 360^\circ \\ \sin \alpha &= \frac{Q}{W \cos \delta} \end{aligned} \quad (2.26b)$$

## 2.5 Torque gradiente de gravidade

A força gravitacional atrai cada elemento infinitesimal de massa "dm" de um corpo com uma determinada intensidade e direção, uma vez que cada elemento possui o vetor posição " $\vec{r}_T$ " em relação ao centro de massa (CM) da Terra. Logo, concluímos que essa diferença de atração em cada elemento de massa gera um torque. Este torque é denominado de *Torque de Gradiente de Gravidade* (TGG).

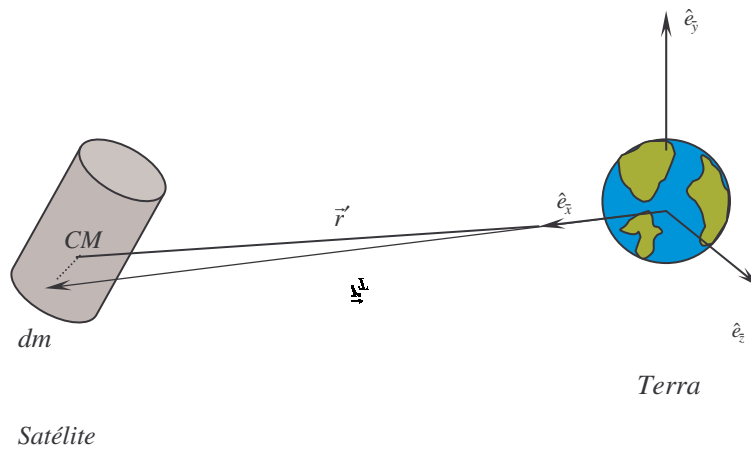


FIGURA 2.3 - Esquemática da relação entre os elementos de massa do satélite e a Terra.

### 2.5.1 Força gravitacional e suas componentes

A força gravitacional em relação ao elemento "dm" é dada por (Pisacane & Moore, 1994):

$$d\vec{F} = -\mu dm \frac{\vec{r}_T}{r_T^3} \quad (2.27)$$

Onde:  $\mu = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$  - constante gravitacional da Terra;

$\vec{r}_T$  = vetor de posição do "dm" em relação ao CM da Terra.

Consideramos que o elemento de massa  $dm$  possui coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  em relação ao  $CM$  do satélite, expressas no Sistema Orbital e que o vetor posição  $\vec{r}'$ , que liga o  $CM$  do satélite ao  $CM$  da Terra, possui módulo igual a  $r'$ . Então, pela FIGURA 2.3, temos que:

$$\vec{r}_T = (r' + x)\hat{e}_{\bar{x}} + y\hat{e}_{\bar{y}} + z\hat{e}_{\bar{z}} \quad (2.28)$$

Onde,  $\hat{e}_{\bar{x}}, \hat{e}_{\bar{y}}, \hat{e}_{\bar{z}}$  representam aqui os vetores unitários do Sistema Orbital.

Portanto, a força gravitacional atuante sobre  $dm$  pode ser escrita como:

$$d\vec{F} = -\mu dm \frac{\hat{r}_T}{\left[\sqrt{(x+r')^2 + y^2 + z^2}\right]^2} \quad (2.29)$$

Onde

$$\hat{r}_T = \frac{(x+r')\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(x+r')^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.30)$$

Com isso, temos as três componentes de  $d\vec{F}$  :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_x &= -\mu dm \frac{(x+r')}{\left[(x+r')^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \hat{e}_{\bar{x}} \\ d\vec{F}_y &= -\mu dm \frac{y}{\left[(x+r')^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \hat{e}_{\bar{y}} \\ d\vec{F}_z &= -\mu dm \frac{z}{\left[(x+r')^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \hat{e}_{\bar{z}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

De outra forma:

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_x &= -\frac{\mu \, dm \left(\frac{x}{r'}+1\right)}{r'^2 \left[ \left(\frac{x}{r'}+1\right)^2 + \left(\frac{y}{r'}\right)^2 + \left(\frac{z}{r'}\right)^2 \right]^{3/2}} \hat{e}_{\bar{x}} \\
d\vec{F}_y &= -\frac{\mu \, dm \left(\frac{y}{r'}\right)}{r'^2 \left[ \left(\frac{x}{r'}+1\right)^2 + \left(\frac{y}{r'}\right)^2 + \left(\frac{z}{r'}\right)^2 \right]^{3/2}} \hat{e}_{\bar{y}} \\
d\vec{F}_z &= -\frac{\mu \, dm \left(\frac{z}{r'}\right)}{r'^2 \left[ \left(\frac{x}{r'}+1\right)^2 + \left(\frac{y}{r'}\right)^2 + \left(\frac{z}{r'}\right)^2 \right]^{3/2}} \hat{e}_{\bar{z}}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Expandindo o denominador em *Série de Taylor* e desprezando os termos quadráticos, temos:

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_x &= -\mu \frac{dm}{r'^2} \left(1 + \frac{x}{r'}\right) \left(1 - 3 \frac{x}{r'}\right) \hat{e}_{\bar{x}} \\
d\vec{F}_y &= -\mu \frac{dm}{r'^2} \frac{y}{r'} \left(1 - 3 \frac{x}{r'}\right) \hat{e}_{\bar{y}} \\
d\vec{F}_z &= -\mu \frac{dm}{r'^2} \frac{z}{r'} \left(1 - 3 \frac{x}{r'}\right) \hat{e}_{\bar{z}}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Realizando o produto entre os termos e desprezando novamente os termos quadráticos, chegamos a:

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_x &= -\mu \frac{dm}{r'^2} \left(1 - 2 \frac{x}{r'}\right) \hat{e}_{\bar{x}} \\
d\vec{F}_y &= -\mu \frac{dm}{r'^2} \frac{y}{r'} \hat{e}_{\bar{y}} \\
d\vec{F}_z &= -\mu \frac{dm}{r'^2} \frac{z}{r'} \hat{e}_{\bar{z}}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

## 2.5.2 Torque gradiente de gravidade e suas componentes

O torque em relação ao centro de massa do satélite é:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \quad (2.35)$$

Realizando o produto vetorial da equação (2.35), utilizando os termos definidos nas equações (2.33) e (2.34), temos:

$$d\vec{M} = -\mu \frac{dm}{r'^3} [(yz - y'z')\hat{e}_x + z(r' - 3x)\hat{e}_y - y(r' - 3x)\hat{e}_z] \quad (2.36)$$

O posicionamento dos elementos de massa do satélite é expresso em um sistema de referência fixo no satélite, o qual acompanha o movimento rotacional do mesmo. Podemos transladar o Sistema Orbital do *CM* da Terra para o *CM* do satélite. Seja  $S_G$  o sistema girante considerado, de vetores unitários  $\hat{e}_x^G, \hat{e}_y^G$  e  $\hat{e}_z^G$ , que se relaciona com o Sistema Orbital através de uma *matriz de rotação*  $A$ , dada por:

$$[S_G] = \bar{A} [S_{\text{Orbital}}] \quad (2.37)$$

Em que :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Assim, as coordenadas  $x, y$  e  $z$  dos elementos de massa  $dm$  são obtidas a partir das coordenadas  $x^G, y^G$  e  $z^G$  do sistema girante.

Considerando um elemento de massa com coordenadas  $x^G, y^G, z^G$  no sistema girante e usando as propriedades de matrizes de rotação, temos os elementos do Sistema Orbital:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^G \\ y^G \\ z^G \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Utilizando a relação (2.38), rescrevemos a equação (2.36):

$$d\vec{M} = -\mu \frac{dm}{r'^3} \left\{ \begin{array}{l} \left( a_{13}x^G + a_{23}y^G + a_{33}z^G \right) \left[ r' - 3 \left( a_{11}x^G + a_{21}y^G + a_{31}z^G \right) \right] \hat{e}_{\bar{y}} - \\ - \left( a_{12}x^G + a_{22}y^G + a_{32}z^G \right) \left[ r' - 3 \left( a_{11}x^G + a_{21}y^G + a_{31}z^G \right) \right] \hat{e}_{\bar{z}} \end{array} \right\} \quad (2.39)$$

Logo, o torque estará contido no plano  $\overline{O}yz$  do Sistema Orbital, dependendo do módulo do vetor posição que une o  $CM$  do satélite ao  $CM$  da Terra ( $r'$ ).

Lembrando as definições de *Produtos e Momentos Principais de Inércia* e como o sistema girante possui sua origem coincidente com o  $CM$  do satélite, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} I_{xx}^G &= \int \left[ (y^G)^2 + (z^G)^2 \right] dm \\ I_{yy}^G &= \int \left[ (x^G)^2 + (z^G)^2 \right] dm \\ I_{zz}^G &= \int \left[ (x^G)^2 + (y^G)^2 \right] dm \\ I_{xz}^G &= -\int x^G z^G dm \\ I_{xy}^G &= -\int x^G y^G dm \\ I_{yz}^G &= -\int y^G z^G dm \\ \int x^G dm &= \int y^G dm = \int z^G dm = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

As equações do movimento rotacional do satélite em geral são expressas no sistema girante, fixo no satélite. Assim, utilizando (2.38) podemos determinar o Torque de Gradiente de Gravidade (TGG) no sistema girante. Efetuando algumas multiplicações entre os termos e, reagrupando os termos convenientemente, de modo a utilizar as equações (2.40) chegamos finalmente a:



$$\bar{\mathbf{M}} = 3 \frac{\mu}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} a_{21}a_{31}(I_{ZZ}^G - I_{YY}^G) + (a_{21}^2 - a_{31}^2)I_{YZ}^G + \\ + a_{11}a_{21}I_{XZ}^G - a_{11}a_{31}I_{XY}^G \end{array} \right] \hat{e}_x^G + \\ + \left[ \begin{array}{l} a_{11}a_{31}(I_{XX}^G - I_{ZZ}^G) + (a_{31}^2 - a_{11}^2)I_{XZ}^G + \\ + a_{21}a_{31}I_{XY}^G - a_{11}a_{21}I_{YZ}^G \end{array} \right] \hat{e}_y^G + \\ + \left[ \begin{array}{l} a_{11}a_{21}(I_{YY}^G - I_{XX}^G) + (a_{11}^2 - a_{21}^2)I_{XY}^G + \\ + a_{11}a_{31}I_{YZ}^G - a_{21}a_{31}I_{XZ}^G \end{array} \right] \hat{e}_z^G \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

Como pode ser observado na equação (2.41), necessitamos de apenas três elementos da matriz de rotação em relação ao sistema girante ( $a_{11}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{31}$ ), que são os cossenos diretores de  $\bar{O}\bar{x}$  do Sistema Orbital com respeito aos eixos  $\bar{O}x^G$ ,  $\bar{O}y^G$  e  $\bar{O}z^G$ .

Há casos de satélites, por convenção de projeto, em que o Sistema Girante coincide com o Sistema de Eixos Principais de Inércia (de vetores unitários  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ ,  $\hat{e}_z$ ). Isto implica na anulação dos Produtos de Inércia. Este recurso é sempre utilizado pois simplifica o modelamento do TGG, e por conseqüência, as equações do movimento rotacional. Neste caso tem-se:

$$\bar{\mathbf{M}} = 3 \frac{\mu}{r^3} \left[ \begin{array}{l} a_{21}a_{31}(I_x - I_y)\hat{e}_x + a_{11}a_{31}(I_x - I_z)\hat{e}_y + \\ + a_{11}a_{21}(I_y - I_x)\hat{e}_z \end{array} \right] \quad (2.42)$$

Portanto, se o satélite possuir uma distribuição de carga (equipamentos a bordo) homogênea ou com simetria esférica em torno do seu centro de massa, a influência deste torque torna-se mínima, ou até nula; caso contrário, a sua influência torna-se significativa.

O TGG costuma ser utilizado na estabilização de satélites que necessitam de uma boa precisão no seu apontamento. Isso é possível devido a existência de dois pontos de equilíbrio estáveis, os quais estão defasados de  $180^\circ$  (Kaplan, 1976).

Verifica-se também que o torque decresce com o cubo da altitude, o que torna inviável a estabilização de satélites de órbitas altas (geo-estacionários, por exemplo) por gradiente de gravidade, devido a pequena ordem de grandeza deste torque.

A matriz de rotação A em termos dos quatérnions dada por (2.18) relaciona o sistema Equatorial com o Sistema Girante do Satélite, no caso, o Sistema de Eixos Principais. Portanto, é necessária uma outra transformação que relacione o Sistema Equatorial com o Sistema Orbital. Tal transformação é obtida através de uma matriz de rotação que depende dos elementos orbitais e é dada por R ( Bate,1971; Rodrigues,2002), cujos elementos são:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \cos(w + f_0)\cos(\Omega) - \sin(w + f_0)\cos(I)\sin(\Omega) \\
 R_{12} &= \cos(w + f_0)\sin(\Omega) + \sin(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \\
 R_{13} &= \sin(w + f_0)\sin(I) \\
 R_{21} &= -\sin(w + f_0)\cos(\Omega) - \cos(w + f_0)\cos(I)\sin(\Omega) \\
 R_{22} &= -\sin(w + f_0)\sin(\Omega) + \cos(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \\
 R_{23} &= \cos(w + f_0)\sin(I) \\
 R_{31} &= \sin(I)\sin(\Omega) \\
 R_{32} &= -\sin(I)\cos(\Omega) \\
 R_{33} &= \cos(I)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Onde I é a inclinação da órbita, w é o argumento do perigeu,  $f_0$  é a anomalia verdadeira e  $\Omega$  é a longitude do nodo ascendente. Os elementos da transposta desta matriz são, então:

$$\begin{aligned}
R_{11}^t &= \cos(w + f_0)\cos(\Omega) - \sin(w + f_0)\cos(I)\sin(\Omega) \\
R_{12}^t &= -\sin(w + f_0)\cos(\Omega) - \cos(w + f_0)\cos(I)\sin(\Omega) \\
R_{13}^t &= \sin(I)\sin(\Omega) \\
R_{21}^t &= \cos(w + f_0)\sin(\Omega) + \sin(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \\
R_{22}^t &= -\sin(w + f_0)\sin(\Omega) + \cos(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \\
R_{23}^t &= -\sin(I)\cos(\Omega) \\
R_{31}^t &= \sin(w + f_0)\sin(I) \\
R_{32}^t &= \cos(w + f_0)\sin(I) \\
R_{33}^t &= \cos(I)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Assim, as coordenadas do Sistema Equatorial podem ser obtidas a partir das coordenadas do sistema orbital através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Equatorial} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Equatorial} \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

Desta forma, a matriz de rotação  $\bar{A}$  dada em (2.37) é obtida passando-se do Sistema Orbital para o Sistema Equatorial com as matrizes de rotação em termos dos elementos orbitais, dada por (2.43), e do Sistema Equatorial para o Sistema de Eixos Principais, dada por (2.18):

$$\bar{A} = Q \cdot R^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Onde Q representa aqui a matriz de rotação dada em termos dos quatérnions. Cada elemento é dado, então, por:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \cdot [\cos(w + f_0) \cos(\Omega) - \text{sen}(w + f_0) \cos(I) \text{sen}(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) \cdot [\cos(w + f_0) \text{sen}(\Omega) + \text{sen}(w + f_0) \cos(I) \cos(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \text{sen}(w + f_0) \text{sen}(I) \\
a_{12} &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \cdot [-\text{sen}(w + f_0) \cos(\Omega) - \cos(w + f_0) \cos(I) \text{sen}(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) \cdot [-\text{sen}(w + f_0) \text{sen}(\Omega) + \cos(w + f_0) \cos(I) \cos(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \cos(w + f_0) \text{sen}(I) \\
a_{13} &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \text{sen}(I) \text{sen}(\Omega) - 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) \text{sen}(I) \cos(\Omega) + \\
&\quad 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \cos(I) \\
a_{21} &= 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) \cdot [\cos(w + f_0) \cos(\Omega) - \text{sen}(w + f_0) \cos(I) \text{sen}(\Omega)] + \\
&\quad (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \cdot [\cos(w + f_0) \text{sen}(\Omega) + \text{sen}(w + f_0) \cos(I) \cos(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \text{sen}(w + f_0) \text{sen}(I) \\
a_{22} &= 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) \cdot [-\text{sen}(w + f_0) \cos(\Omega) - \cos(w + f_0) \cos(I) \text{sen}(\Omega)] + \\
&\quad (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \cdot [-\text{sen}(w + f_0) \text{sen}(\Omega) + \cos(w + f_0) \cos(I) \cos(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \cos(w + f_0) \text{sen}(I) \tag{2.47} \\
a_{23} &= 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) \text{sen}(I) \text{sen}(\Omega) - (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \text{sen}(I) \cos(\Omega) + \\
&\quad 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \cos(I) \\
a_{31} &= 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) \cdot [\cos(w + f_0) \cos(\Omega) - \text{sen}(w + f_0) \cos(I) \text{sen}(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) \cdot [\cos(w + f_0) \text{sen}(\Omega) + \text{sen}(w + f_0) \cos(I) \cos(\Omega)] + \\
&\quad (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \text{sen}(w + f_0) \text{sen}(I) \\
a_{32} &= 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) \cdot [-\text{sen}(w + f_0) \cos(\Omega) - \cos(w + f_0) \cos(I) \text{sen}(\Omega)] + \\
&\quad 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) \cdot [-\text{sen}(w + f_0) \text{sen}(\Omega) + \cos(w + f_0) \cos(I) \cos(\Omega)] + \\
&\quad (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \cos(w + f_0) \text{sen}(I) \\
a_{33} &= 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) \text{sen}(I) \text{sen}(\Omega) - 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) \text{sen}(I) \cos(\Omega) + \\
&\quad (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \cos(I)
\end{aligned}$$

Para a determinação do módulo do vetor posição  $r$  e da anomalia verdadeira serão utilizadas as expansões do movimento elíptico (Brower & Clemence, 1961), até Segunda ordem na excentricidade:

$$r = a \left\{ 1 - e \cos(m) + \frac{e^2}{2} [1 - \cos(2m)] \right\} \quad (2.48)$$

$$f_0 = m + 2e \sin(m) + \frac{5}{4} e^2 \sin(2m) \quad (2.49)$$

Em que  $m$  é a anomalia média dada por:

$$m = t \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (2.50)$$

E substituindo  $a_{11}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{31}$  na equação (2.42) obtém-se as componentes do Torque de Gradiente de Gravidade atuante no satélite, no Sistema de Eixos Principais e em termos dos quatérnions. Tais componentes serão substituídas nas equações de Euler para se analisar a influência do torque de gradiente de gravidade nas componentes da velocidade de rotação.

## 2.6 Torques magnéticos

O torque de origem magnética atuante em um satélite artificial resulta da interação entre o campo magnético do satélite e o campo geomagnético.

As principais fontes causadoras do torque magnético são o momento magnético do satélite, as correntes de Foucault e a histerese, sendo o momento magnético do satélite usualmente a fonte dominante.

Em geral no projeto do satélite é selecionado um material estrutural adequado de modo que as demais fontes resultem em torques magnéticos negligenciáveis.

O torque magnético pode ser subdividido em:

Torque Magnético Residual: este torque ocorre principalmente devido ao momento magnético ao longo do eixo de rotação do satélite (WERTZ, 1978) que contribui para uma lenta precessão do eixo de rotação e pode ser obtido por:

$$\vec{N}_r = \vec{M} \times \vec{B} \quad (2.51)$$

Em que  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local e  $\vec{M}$  é a soma dos momentos magnéticos individuais do satélite.

Torque devido às correntes de Foucault: este torque ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam pelas superfícies metálicas do satélite causando um decaimento de perfil exponencial da velocidade de rotação. Tal torque pode ser descrito por (WERTZ, 1978):

$$\vec{N}_i = P \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{W}) \quad (2.52)$$

Em que  $\vec{W}$  é a velocidade angular de rotação,  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local, e P é um coeficiente que depende da geometria do satélite e da condutividade do material.

Torque de Histerese: este torque é causado pela energia perdida na forma de calor durante o movimento de rotação do satélite, devido ao atrito com o campo geomagnético, sendo que os efeitos deste torque são apreciáveis apenas em materiais nos quais variações no campo magnético local causam grandes variações no momento magnético do satélite.

Neste trabalho é considerada a influência do torque magnético residual e do torque devido às correntes de Foucault sobre o satélite estabilizado por rotação. Antes da discussão acerca o torque magnético, são apresentadas algumas características do campo magnético terrestre, uma vez que a modelagem das componentes do campo geomagnético são necessárias no cômputo das componentes de cada torque.

### 2.6.1 Campo magnético da terra

O primeiro tratado científico acerca do campo magnético terrestre foi escrito pelo físico e médico inglês William Gilbert (1544-1603) em sua obra “Magneto”, publicado em Londres em 1600. Em 1701, o físico e astrônomo Edmund Halley (1656-1742) também inglês, publicou a primeira carta de declinações magnéticas, que havia preparado, realizando trabalhosas e pacientes medições nas águas do Atlântico.

No século XIX, o químico e físico Michael Faraday (1791-1867) elaborou a difícil noção de campo e empregou pela primeira vez, o termo “Campo Magnético”. Em 1838, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, encontrou uma representação matemática aproximada para o campo magnético terrestre, que assumiu a forma de uma soma de termos conhecida como harmônicos esféricos. Como o campo magnético gira com a Terra, sendo uma indicação clara que o campo se origina da Terra, e devido à natureza esférica da Terra, o potencial magnético terrestre passou a ser convenientemente expresso em harmônicos esféricos como (WERTZ, 1978):

$$V(r, \theta, \phi) = R_T \sum_{n=1}^k \left( \frac{R_T}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \quad (2.53)$$

Em que  $R_T$  é o raio equatorial da Terra;  $g_n^m, h_n^m$  são os coeficientes Gaussianos;  $P_n^m(\theta)$  são polinômios associados de Legendre;  $r, \theta, \phi$  representam a distância geocêntrica, a co-latitute e a longitude a leste de um ponto no espaço, respectivamente.

O truncamento no desenvolvimento da série de harmônicos esféricos da equação acima estabelece o modelo a ser considerado para o campo geomagnético, isto é, se  $n$  vale 1 ou 2, o potencial é denominado modelo de dipolo ou quadripolo, respectivamente, sendo que a partir de  $n$  igual a 3 o potencial é denominado de múltiplos pólos. Os coeficientes gaussianos são determinados empiricamente pelo método de mínimos quadrados para medidas do campo e são encontrados no Internacional Geomagnetic Reference Field, sendo que vários valores destes coeficientes são apresentados em Wertz (1978), para a época de 1975.

O Campo Geomagnético pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar  $V$  (WERTZ, 1978), ou seja:

$$\vec{B} = -\nabla V \quad (2.54)$$

Neste trabalho considera-se que o potencial escalar ( $V$ ) de um dipolo magnético pode ser expresso por (THOMAS; CAPELLARI, 1964):

$$V = \frac{-\ell}{4\pi\mu_o} \frac{\hat{k}_m \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.55)$$

Em que  $\mu_o$  é a permeabilidade do espaço livre igual a  $4\pi \times 10^{-7}$  Weber/ampère metro (THOMAS; CAPELLARI, 1964);  $\ell$  é módulo do vetor do momento magnético do campo terrestre cuja magnitude é igual a  $10^{17}$  Weber-metro (THOMAS; CAPELLARI, 1964);  $\hat{k}_m$  é o vetor unitário que descreve a direção do momento geomagnético;  $\vec{r}$  é o vetor posição do centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra (coincidente com o centro do dipolo do campo geomagnético). Nestas unidades a parcela  $\frac{\ell}{4\pi\mu_o}$  é dada em ampère-metro quadrado, mas nas equações do movimento é necessário que seja dada em Weber-metro. De acordo com Wertz (1978), esta parcela assume o valor de  $7.943 \times 10^{15}$  Weber- metro.

### 2.6.1.1 Componentes do campo magnético terrestre no sistema equatorial

Ao vetor de dipolo está associado o sistema magnético  $O'x_my_mz_m$ , que se relaciona com o sistema equatorial através dos ângulos  $\beta$  e  $\eta$  que definem a orientação do vetor de dipolo, sendo  $\beta$  a inclinação do vetor de dipolo em relação ao eixo equatorial  $OZ$  e  $\eta$  o argumento do nodo ascendente do equador geomagnético, como mostra a FIGURA 2.4.



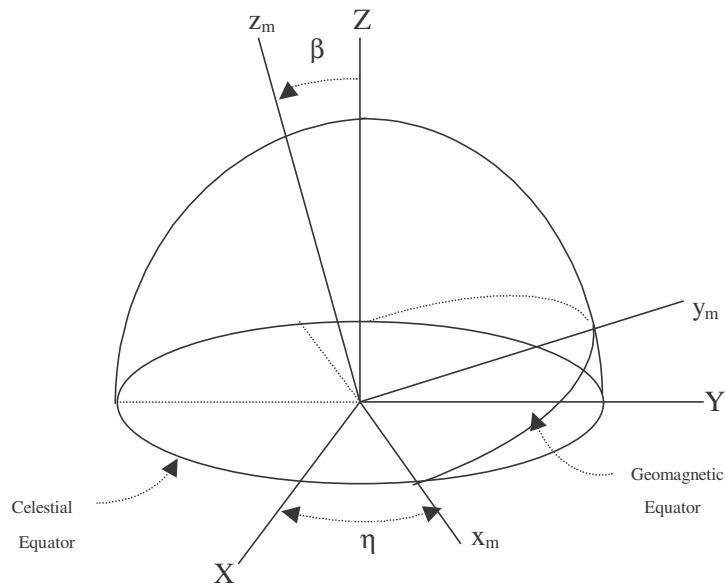


FIGURA 2.4 - Sistema Magnético ( $Ox_m y_m z_m$ ) e Sistema Equatorial ( $OXYZ$ ).

FONTE: Quirelli (2002).

Os vetores unitários do sistema magnético são representados por  $\hat{i}_m, \hat{j}_m, \hat{k}_m$ . Consideremos o vetor posição do satélite  $\vec{r}$  expresso no sistema magnético :

$$\vec{r} = x_m \hat{i}_m + y_m \hat{j}_m + z_m \hat{k}_m \quad (2.56)$$

Substituindo o potencial do dipolo geomagnético, dado por (2.55), em (2.54) o campo magnético da Terra é obtido por:

$$\vec{B} = \frac{-\ell}{4\pi\mu_o} \nabla \cdot \left( \frac{z_m}{r^3} \right) \quad (2.57)$$

Em que:

$$r^3 = (x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)^{3/2} \quad (2.58)$$

Substituindo (2.58) em (2.57) e evoluindo os cálculos obtém-se:

$$\vec{B} = \frac{-\ell r^2}{4\pi\mu_o r^5} \left[ 3x_m z_m \hat{i}_m + 3y_m z_m \hat{j}_m + (3z_m^2 - r^2) \hat{k}_m \right] \quad (2.59)$$

Sejam as coordenadas normalizadas das componentes do vetor posição  $\vec{r}$ :

$$\frac{x_m}{r} = r_x ; \quad \frac{y_m}{r} = r_y ; \quad \frac{z_m}{r} = r_z \quad (2.60)$$

Substituindo (2.60) em (2.59), o campo magnético  $\vec{B}$  pode ser expresso no sistema magnético por:

$$\vec{B} = \frac{-\ell}{4\pi\mu_o r^3} \left[ 3r_x r_z \hat{i}_m + 3r_y r_z \hat{j}_m + (3r_z^2 - 1) \hat{k}_m \right] \quad (2.61)$$

Logo:

$$3(r_x \hat{i}_m + r_y \hat{j}_m + r_z \hat{k}_m) r_z = \frac{3\vec{r} z_m}{r^2} \quad (2.62)$$

Se  $\hat{i}_s$  é o vetor unitário ao longo do vetor posição, então:

$$\vec{r} = r \hat{i}_s \quad (2.63)$$

$$z_m = \vec{r} \cdot \hat{k}_m = r (\hat{i}_s \cdot \hat{k}_m) \quad (2.64)$$

E substituindo (2.63) e (2.64) em (2.62) tem-se:

$$3(r_x \hat{i}_m + r_y \hat{j}_m + r_z \hat{k}_m) = 3(\hat{i}_s \cdot \hat{k}_m) \hat{i}_s \quad (2.65)$$

Assim, utilizando (2.65), a equação (2.61) pode ser rescrita como:

$$\vec{B} = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} \left[ \hat{k}_m - 3(\hat{i}_s \cdot \hat{k}_m) \hat{i}_s \right] \quad (2.66)$$

Os vetores unitários  $\hat{i}_s$  e  $\hat{k}_m$  podem ser expressos no sistema equatorial. Para se obter o vetor unitário  $\hat{i}_s$  no sistema equatorial é utilizado os ângulos de Euler, em um conjunto de três rotações consecutiva ( ZXZ), necessárias para se passar de um sistema de coordenadas para outro:

- rotação  $\Omega$  em OZ ;

- rotação I em OX' ;

- rotação  $(\omega + \nu)$  OZ.

Deste modo, utilizando a matriz de rotação entre estes dois sistemas, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{j}_s \\ \hat{k}_s \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Em que  $R_1 = R_Z(\omega + \nu)R_X(I)R_Z(\Omega)$

$$R_1 = \begin{bmatrix} c(\omega + \nu)c\Omega - s\Omega s(\omega + \nu)cI & c(\omega + \nu)s\Omega + s(\omega + \nu)cIc\Omega & s(\omega + \nu)sI \\ -s(\omega + \nu)c\Omega - c(\omega + \nu)cIs\Omega & -s(\omega + \nu)s\Omega + c(\omega + \nu)cIc\Omega & c(\omega + \nu)sI \\ sIs\Omega & -sIc\Omega & cI \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Substituindo a equação (2.68) na equação (2.67) obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{i}_s &= [c(\omega + \nu)c\Omega - s\Omega s(\omega + \nu)cI] \hat{I} + [c(\omega + \nu)s\Omega + s(\omega + \nu)cIc\Omega] \hat{J} + [s(\omega + \nu)sI] \hat{K} \\ \hat{j}_s &= [-s(\omega + \nu)c\Omega - c(\omega + \nu)cIs\Omega] \hat{I} + [-s(\omega + \nu)s\Omega + c(\omega + \nu)cIc\Omega] \hat{J} + [c(\omega + \nu)sI] \hat{K} \\ \hat{k}_s &= (sI s\Omega) \hat{I} + (-sI c\Omega) \hat{J} + cI \hat{K} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Em que: c= cosseno e s = seno

Para se obter o vetor unitário  $\hat{k}_m$  no sistema equatorial, é utilizado um conjunto de duas rotações:

- rotação de um ângulo  $\eta$  em torno de O'Z , tal que  $R_Z(\eta)$  ;

- rotação de um ângulo  $\beta$  em torno de  $O' x_m$ , tal que  $R_X(\beta)$

Deste modo utilizando a matriz de rotação que relaciona os sistemas temos:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_m \\ \hat{j}_m \\ \hat{k}_m \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Em que  $R_2 = R_X(\beta)R_z(\eta)$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\eta & \text{sen}\eta & 0 \\ -\cos\beta\text{sen}\eta & \cos\beta\cos\eta & \text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta\text{sen}\eta & -\text{sen}\beta\cos\eta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Substituindo a equação (2.71) na equação (2.70), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{i}_m &= \cos\eta\hat{I} + \text{sen}\eta\hat{J} \\ \hat{j}_m &= -\cos\beta\text{sen}\eta\hat{I} + \cos\beta\cos\eta\hat{J} + \text{sen}\beta\hat{K} \\ \hat{k}_m &= \text{sen}\beta\text{sen}\eta\hat{I} - \text{sen}\beta\cos\eta\hat{J} + \cos\beta\hat{K} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Os vetores  $\hat{i}_s$  e  $\hat{k}_m$ , dados por (2.69) e (2.72), respectivamente, podem ser representados na forma:

$$\hat{i}_s = a\hat{I} + b\hat{J} + c\hat{K} \quad (2.73)$$

$$\hat{k}_m = am\hat{I} + bm\hat{J} + cm\hat{K} \quad (2.74)$$

Em que

$$as = \cos(\omega + \nu)\cos\Omega - \text{sen}\Omega\text{sen}(\omega + \nu)\cos I \quad (2.73a)$$

$$bs = \cos(\omega + \nu)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega + \nu)\cos I \cos\Omega \quad (2.73b)$$

$$cs = \text{sen}(\omega + \nu)\text{sen} I \quad (2.73c)$$

$$am = \text{sen}\beta\text{sen}\eta \quad (2.74d)$$

$$bm = -\text{sen}\beta\cos\eta \quad (2.74e)$$

$$cm = \cos\beta \quad (2.74f)$$

Assim o produto escalar de  $\hat{i}_s$  e  $\hat{k}_m$  é dado por:

$$(\hat{i}_s \bullet \hat{k}_m) = (as.am) + (bs.bm) + (cs.cm) = IsKm \quad (2.75)$$

O campo magnético terrestre  $\vec{B}$  pode ser computado pela equação (2.66), utilizando as relações anteriormente demonstradas, e é expresso no sistema equatorial OXYZ por:

$$\vec{B} = B_x \hat{I} + B_y \hat{J} + B_z \hat{K} \quad (2.76)$$

Em que:

$$B_x = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} [am - (3IsKm)as] \quad (2.76a)$$

$$B_y = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} [bm - (3IsKm)bs] \quad (2.76b)$$

$$B_z = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} [cm - (3IsKm)cs] \quad (2.76c)$$

### 2.6.1.2 Componentes do campo magnético terrestre no sistema do satélite

Como os vetores unitários do sistema equatorial se relacionam com os vetores unitários do sistema do satélite através da matriz de rotação em termos dos quatérnions, dada por (2.18), as componentes do campo geomagnético no sistema do satélite podem ser determinadas. Deste modo, utilizando a matriz de rotação que relaciona os sistemas temos:

$$\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} = A^t \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Em que

$$\begin{aligned} \hat{I} &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\hat{i} + 2(q_1q_2 - q_3q_4)\hat{j} + 2(q_1q_3 + q_2q_4)\hat{k} \\ \hat{J} &= 2(q_1q_2 + q_3q_4)\hat{i} + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\hat{j} + 2(q_2q_3 - q_1q_4)\hat{k} \\ \hat{K} &= 2(q_1q_3 - q_2q_4)\hat{i} + 2(q_2q_3 + q_1q_4)\hat{j} + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)\hat{k} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Seja a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= q_A\hat{i} + q_B\hat{j} + q_C\hat{k} \\ \hat{J} &= q_D\hat{i} + q_E\hat{j} + q_F\hat{k} \\ \hat{K} &= q_G\hat{i} + q_H\hat{j} + q_I\hat{k} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Com:

$$q_A = (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \quad (2.79a)$$

$$q_B = 2(q_1q_2 - q_3q_4) \quad (2.79b)$$

$$q_C = 2(q_1q_3 + q_2q_4) \quad (2.79c)$$

$$q_D = 2(q_1q_2 + q_3q_4) \quad (2.79d)$$

$$q_E = (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \quad (2.79e)$$

$$q_F = 2(q_2q_3 - q_1q_4) \quad (2.79f)$$

$$q_G = 2(q_1q_3 - q_2q_4) \quad (2.79g)$$

$$q_H = 2(q_2q_3 + q_1q_4) \quad (2.79h)$$

$$q_I = (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \quad (2.79i)$$

Substituindo (2.79) em (2.76), determinam-se as componentes do campo geomagnético no sistema do satélite Oxyz:

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (2.80)$$

Em que:

$$\begin{aligned} B_x &= [(B_X q_A) + (B_Y q_D) + (B_Z q_G)] \\ B_y &= [(B_X q_B) + (B_Y q_E) + (B_Z q_H)] \\ B_z &= [(B_X q_C) + (B_Y q_F) + (B_Z q_I)] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Com  $B_X$ ,  $B_Y$  e  $B_Z$  dados em (2.76).

### 2.6.2 Torque residual

O torque magnético residual ocorre principalmente devido ao momento magnético ao longo do eixo de rotação do satélite (Wertz, 1978) que contribui para uma lenta precessão do eixo de rotação e pode ser obtido por:

$$\vec{N}_r = \vec{M} \times \vec{B} \quad (2.82)$$

Em que:  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local e  $\vec{M}$  é a soma dos momentos magnéticos individuais dos satélite. Esses momentos individuais são resultantes dos equipamentos eletrônicos que estão a bordo do satélite.

O campo magnético terrestre no sistema do satélite é dado por (2.80) e suas componentes são dadas em (2.81).

Após manipulações algébricas, dados o torque residual em (2.82) e o campo magnético em (2.80), tem-se as componentes do torque residual no sistema do satélite:

$$\vec{N}_r = -B_y M \hat{i} + B_x M \hat{j} \quad (2.83)$$

Em que

$$N_x = -B_y M$$

$$N_y = B_x M$$

$$N_z = 0$$

As parcelas do torque  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  deverão ser substituídas nas equações de Euler, dadas por (2.20), e uma solução numérica pode ser determinada pelo método de Runge - Kutta de 8ª ordem.

### 2.6.3 Torque devido às correntes de Foucault

O torque devido às correntes de Foucault é dado por (2.52) e a velocidade de rotação no sistema do satélite dada por (2.23). Substituindo o campo geomagnético, a velocidade de rotação no sistema do satélite, dados por (2.80) e (2.23), respectivamente, na equação (2.52) e evoluindo os cálculos, este torque é dado por:

$$\vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} \quad (2.84)$$

$$M_x = [B_y (B_x q - B_y p) - B_z (B_z p - B_x r)]$$

$$M_y = [B_z (B_y r - B_z q) - B_x (B_x q - B_y p)] \quad (2.85)$$

$$M_z = [B_x (B_z p - B_x r) - B_y (B_y r - B_z q)]$$

As parcelas do torque  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  deverão ser substituídas nas equações de Euler, dadas por (2.20), para se determinar uma solução numérica pelo método de Runge - Kutta de 8ª ordem. Com  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  dados em (2.81).



## 2.7 Aplicações e resultados

Neste capítulo, apresentam-se aplicações da teoria desenvolvida para os satélites brasileiros SCD1 e SCD2. Estes satélites são estabilizados por rotação e são, portanto, adequados para a comparação da teoria com os dados gerados pelo Centro de Controle de Satélites (CCS) do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE.

Devido à complexidade das equações cinemáticas em termos dos quatérnions dadas em (2.21) e das equações dinâmicas associadas com as taxas de variações das componentes da velocidade de rotação ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ), dadas em (2.20), apenas uma abordagem numérica é realizada, através do método de Runge - Kutta de oitava ordem, sendo comparadas as soluções numéricas. Nesta abordagem, são considerados dados reais dos satélites SCD1 e SCD2, para as condições iniciais vinculadas as componentes da velocidade angular de rotação  $p_0$ ,  $q_0$  e  $r_0$ , a ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite. Os resultados são apresentados em gráficos e tabelas que mostram a comparação entre os resultados obtidos para o movimento rotacional livre de torques externos e para o caso em que os torques são incluídos conjuntamente nas equações do movimento. Faz-se uma comparação com os dados reais fornecidos pelo CCS-INPE, com os valores computados pelas simulações numéricas para os torques individuais e para os torques em conjunto. O software utilizado neste trabalho foi o *FORTTRAN* para a realização das simulações.

As simulações foram realizadas para um período de 17 dias para o satélite SCD1, e um período de 16 dias para o satélite SCD2, com os dados sendo atualizados a cada 24 horas com os dados fornecidos pelo CCS/INPE. Neste período ocorreu uma correção da atitude para o SCD2, correspondente ao dia 24/02/2002.

Além das simulações previstas para este projeto foi realizada uma simulação extra, em que, o período não foi de apenas 1 dia, mas, de 4 dias para o satélite SCD2, nos quais, apenas o parâmetro de Foucault e o Momento Magnético foram atualizados a cada 24 horas, os resultados e análises estão juntos com os que seguem.

Os resultados estão apresentados em forma de tabelas e gráficos. As tabelas apresentam os valores fornecidos pelo CCS/INPE e os resultados obtidos nas simulações à cada 24 horas para a magnitude da velocidade de rotação do satélite ( $W$ ), a ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite, indicando também as diferenças entre estes dois valores. Os gráficos apresentam o comportamento com o tempo de cada variável e também os erros obtidos com cada torque (erro = valor obtido menos valor do INPE).

## 2.7.1 Simulações para o satélite SCD1

### 2.7.1.1 Resultados para a Ascensão Reta

TABELA 0.1 - Variações da ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Ascensão Reta [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
17/8/1993	280,090	280,090	280,090	280,090	280,090	280,090
18/8/1993	281,010	280,090	280,090	279,907	280,350	280,164
19/8/1993	281,740	281,010	281,010	280,869	281,270	281,121
20/8/1993	282,240	281,740	281,740	281,639	281,970	281,876
21/8/1993	282,570	282,240	282,240	282,176	282,460	282,399
22/8/1993	282,700	282,570	282,570	282,539	282,770	282,739
23/8/1993	282,670	282,700	282,700	282,699	282,870	282,867
24/8/1993	283,500	282,670	282,670	282,710	282,820	282,848
25/8/1993	283,010	283,500	283,500	283,556	283,630	283,683
26/8/1993	282,430	283,010	283,010	283,085	283,120	283,191
27/8/1993	281,010	282,430	282,430	282,522	282,520	282,608
28/8/1993	281,010	281,010	281,010	281,119	281,070	281,183
29/8/1993	280,180	281,010	281,010	281,128	281,060	281,176
30/8/1993	279,290	280,180	280,180	280,308	280,240	280,344
31/8/1993	278,340	279,290	279,290	279,426	279,310	279,451
1/9/1993	277,360	278,340	278,340	278,482	278,360	278,502
2/9/1993	276,340	277,360	277,360	277,506	277,380	277,523

TABELA 0.2 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe					
Dias	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
17/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18/8/1993	0,920	0,920	1,103	0,660	0,846
19/8/1993	0,730	0,730	0,871	0,470	0,619
20/8/1993	0,500	0,500	0,601	0,270	0,364
21/8/1993	0,330	0,330	0,394	0,110	0,171
22/8/1993	0,130	0,130	0,161	-0,070	-0,039
23/8/1993	-0,030	-0,030	-0,029	-0,200	-0,197
24/8/1993	0,830	0,830	0,790	0,680	0,652
25/8/1993	-0,490	-0,490	-0,546	-0,620	-0,673
26/8/1993	-0,580	-0,580	-0,655	-0,690	-0,761
27/8/1993	-1,420	-1,420	-1,512	-1,510	-1,598
28/8/1993	0,000	0,000	-0,109	-0,060	-0,173
29/8/1993	-0,830	-0,830	-0,948	-0,880	-0,996
30/8/1993	-0,890	-0,890	-1,018	-0,950	-1,054
31/8/1993	-0,950	-0,950	-1,086	-0,970	-1,111
1/9/1993	-0,980	-0,980	-1,122	-1,000	-1,142
2/9/1993	-1,020	-1,020	-1,166	-1,040	-1,183
Média do erro	-0,221	-0,221	-0,251	-0,341	-0,369
Desvio Padrão	0,733	0,733	0,823	0,667	0,753

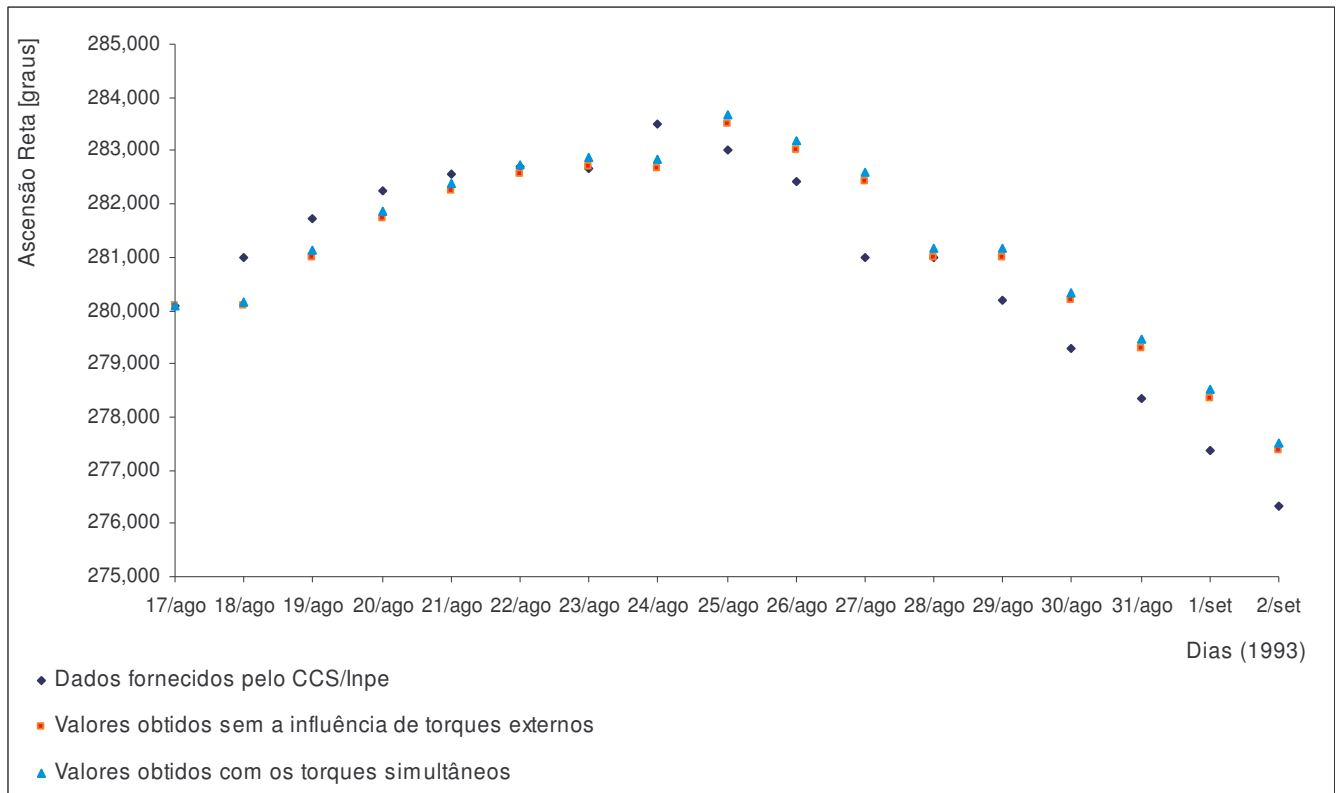


FIGURA 2.5 - Evolução da ascensão reta do satélite SCD1 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

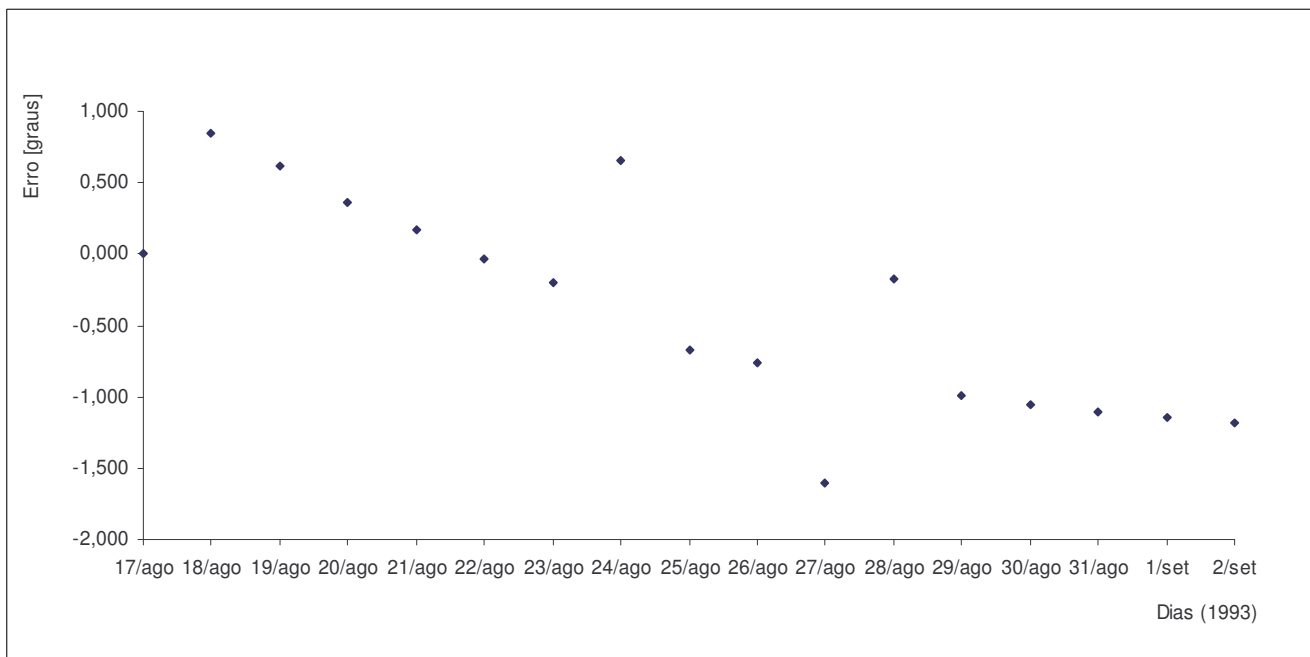


FIGURA 2.6 - Variação do erro para a ascensão reta do satélite SCD1, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

### 2.7.1.2 Resultados para a Declinação

TABELA 0.3 - Variações da declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Declinação [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
17/8/1993	81,100	81,100	81,100	81,100	81,100	81,100
18/8/1993	80,820	81,100	81,100	81,155	81,110	81,168
19/8/1993	80,530	80,820	80,820	80,876	80,830	80,885
20/8/1993	80,230	80,530	80,530	80,587	80,530	80,591
21/8/1993	79,930	80,230	80,230	80,287	80,230	80,287
22/8/1993	79,640	79,930	79,930	79,986	79,930	79,982
23/8/1993	79,350	79,640	79,640	79,694	79,630	79,688
24/8/1993	79,220	79,350	79,350	79,401	79,340	79,393
25/8/1993	78,950	79,220	79,220	79,269	79,210	79,258
26/8/1993	78,700	78,950	78,950	78,995	78,940	78,984
27/8/1993	78,700	78,700	78,700	78,742	78,700	78,729
28/8/1993	78,270	78,700	78,700	78,738	78,690	78,727
29/8/1993	78,080	78,270	78,270	78,303	78,260	78,292
30/8/1993	77,910	78,080	78,080	78,108	78,070	78,098
31/8/1993	77,780	77,910	77,910	77,933	77,900	77,923
1/9/1993	77,670	77,780	77,780	77,798	77,770	77,787
2/9/1993	77,580	77,670	77,670	77,682	77,660	77,669

TABELA 0.4 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe					
Dias	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
17/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18/8/1993	-0,280	-0,280	-0,335	-0,290	-0,348
19/8/1993	-0,290	-0,290	-0,346	-0,300	-0,355
20/8/1993	-0,300	-0,300	-0,357	-0,300	-0,361
21/8/1993	-0,300	-0,300	-0,357	-0,300	-0,357
22/8/1993	-0,290	-0,290	-0,346	-0,290	-0,342
23/8/1993	-0,290	-0,290	-0,344	-0,280	-0,338
24/8/1993	-0,130	-0,130	-0,181	-0,120	-0,173
25/8/1993	-0,270	-0,270	-0,319	-0,260	-0,308
26/8/1993	-0,250	-0,250	-0,295	-0,240	-0,284
27/8/1993	0,000	0,000	-0,042	0,000	-0,029
28/8/1993	-0,430	-0,430	-0,468	-0,420	-0,457
29/8/1993	-0,190	-0,190	-0,223	-0,180	-0,212
30/8/1993	-0,170	-0,170	-0,198	-0,160	-0,188
31/8/1993	-0,130	-0,130	-0,153	-0,120	-0,143
1/9/1993	-0,110	-0,110	-0,128	-0,100	-0,117
2/9/1993	-0,090	-0,090	-0,102	-0,080	-0,089
Média do erro	-0,207	-0,207	-0,247	-0,202	-0,241
Desvio Padrão	0,118	0,118	0,130	0,119	0,133

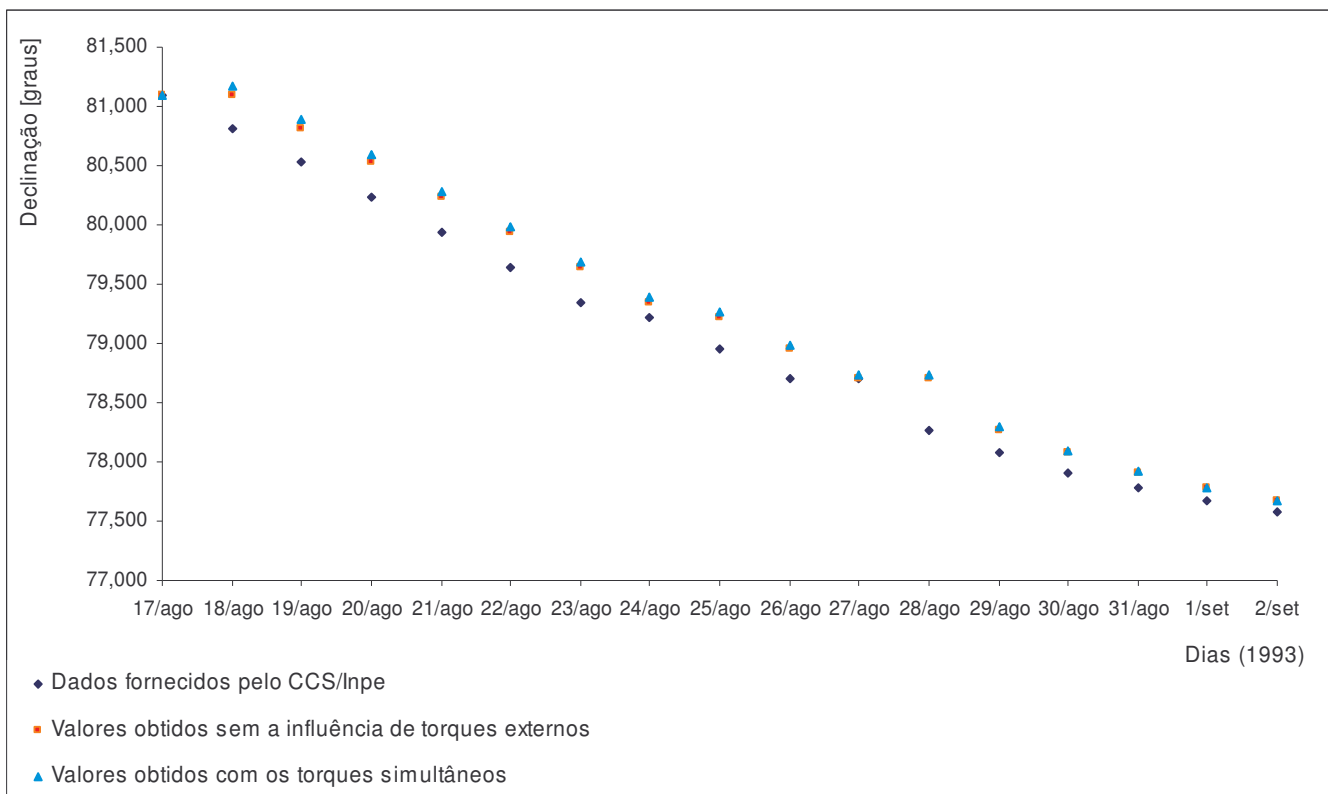


FIGURA 2.7 - Evolução da declinação do satélite SCD1 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

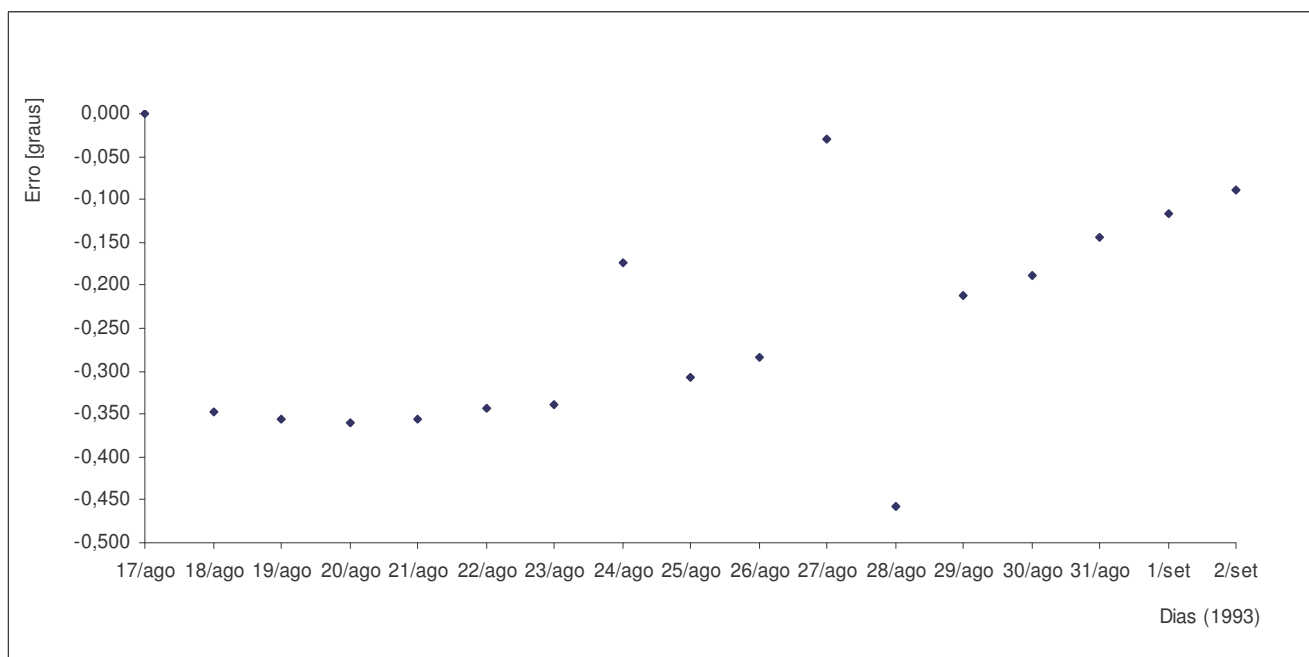


FIGURA 2.8 - Variação do erro para a declinação do satélite SCD1, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.



### 2.7.1.3 Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação

TABELA 0.5 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Velocidade de Rotação [rpm]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
17/8/1993	87,060	87,060	87,060	87,060	87,060	87,060
18/8/1993	86,880	87,060	87,060	87,060	86,900	86,901
19/8/1993	86,710	86,880	86,880	86,880	86,730	86,726
20/8/1993	86,540	86,710	86,710	86,710	86,570	86,566
21/8/1993	86,370	86,540	86,540	86,540	86,400	86,403
22/8/1993	86,210	86,370	86,370	86,370	86,240	86,244
23/8/1993	86,040	86,210	86,210	86,210	86,100	86,101
24/8/1993	85,880	86,040	86,040	86,040	85,940	85,937
25/8/1993	85,800	85,880	85,880	85,880	85,780	85,790
26/8/1993	85,730	85,800	85,800	85,800	85,730	85,720
27/8/1993	85,580	85,730	85,730	85,730	85,660	85,658
28/8/1993	85,580	85,580	85,580	85,580	85,580	85,523
29/8/1993	85,510	85,580	85,580	85,580	85,530	85,530
30/8/1993	85,440	85,510	85,510	85,510	85,460	85,467
31/8/1993	85,370	85,440	85,440	85,440	85,400	85,403
1/9/1993	85,310	85,370	85,370	85,370	85,330	85,332
2/9/1993	85,240	85,310	85,310	85,310	85,260	85,265

TABELA 0.6 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe					
Dias	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
17/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18/8/1993	-0,180	-0,180	-0,180	-0,020	-0,021
19/8/1993	-0,170	-0,170	-0,170	-0,020	-0,016
20/8/1993	-0,170	-0,170	-0,170	-0,030	-0,026
21/8/1993	-0,170	-0,170	-0,170	-0,030	-0,033
22/8/1993	-0,160	-0,160	-0,160	-0,030	-0,034
23/8/1993	-0,170	-0,170	-0,170	-0,060	-0,061
24/8/1993	-0,160	-0,160	-0,160	-0,060	-0,057
25/8/1993	-0,080	-0,080	-0,080	0,020	0,010
26/8/1993	-0,070	-0,070	-0,070	0,000	0,010
27/8/1993	-0,150	-0,150	-0,150	-0,080	-0,078
28/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,000	0,057
29/8/1993	-0,070	-0,070	-0,070	-0,020	-0,020
30/8/1993	-0,070	-0,070	-0,070	-0,020	-0,027
31/8/1993	-0,070	-0,070	-0,070	-0,030	-0,033
1/9/1993	-0,060	-0,060	-0,060	-0,020	-0,022
2/9/1993	-0,070	-0,070	-0,070	-0,020	-0,025
Média do erro	-0,107	-0,107	-0,107	-0,025	-0,022
Desvio Padrão	0,062	0,062	0,062	0,025	0,031

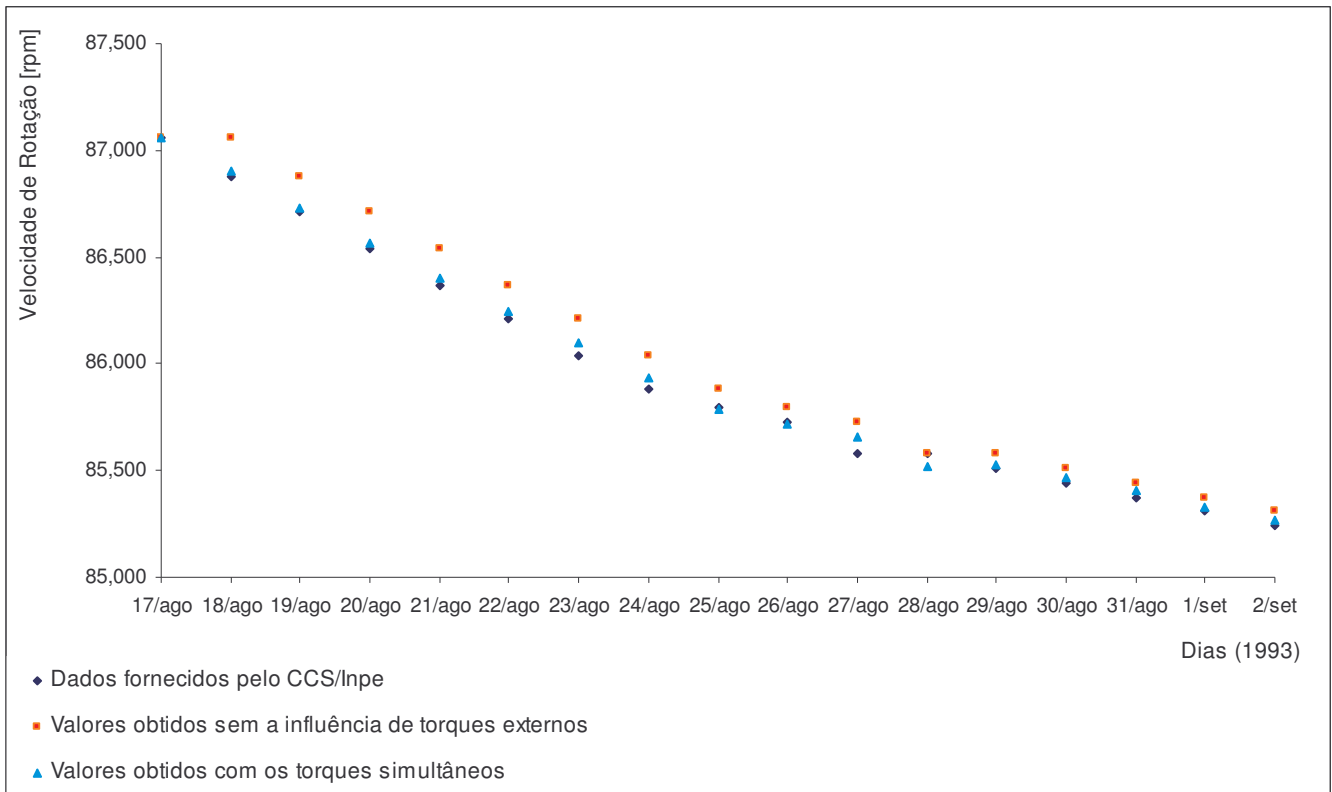


FIGURA 2.9 - Evolução do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

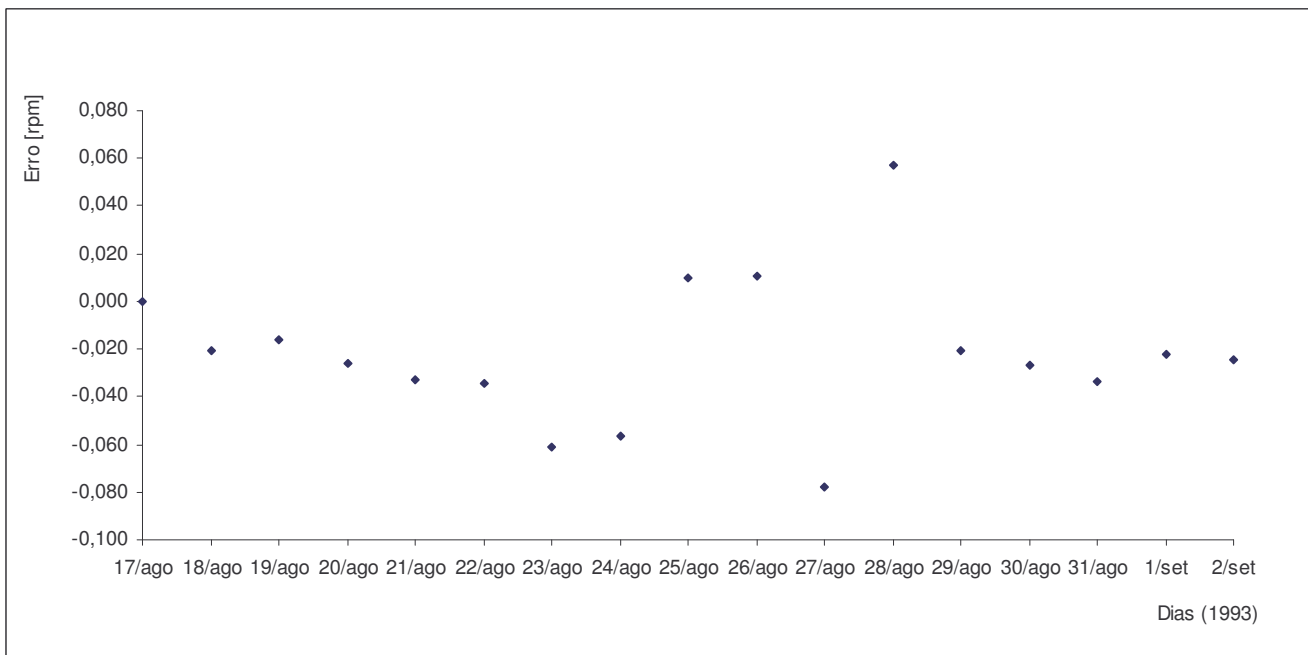


FIGURA 2.10 - Variação do erro para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

## 2.7.2 Simulações para o satélite SCD2

### 2.7.2.1 Resultados para a Ascensão Reta

TABELA 0.7 - Variações da ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Ascensão Reta [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
12/2/2002	278,710	278,710	278,710	278,710	278,710	278,710
13/2/2002	278,730	278,710	278,710	278,686	278,730	278,710
14/2/2002	278,740	278,730	278,730	278,709	278,740	278,718
15/2/2002	278,740	278,740	278,340	278,719	278,740	278,712
16/2/2002	278,720	278,740	278,740	278,715	278,720	278,691
17/2/2002	278,680	278,720	278,720	278,688	278,680	278,647
18/2/2002	278,630	278,680	278,680	278,638	278,620	278,582
19/2/2002	278,570	278,630	278,630	278,576	278,560	278,505
20/2/2002	278,500	278,570	278,570	278,501	278,480	278,419
21/2/2002	278,420	278,500	278,500	278,414	278,410	278,324
22/2/2002	278,330	278,420	278,420	278,316	278,330	278,222
23/2/2002	278,230	278,330	278,330	278,207	278,230	278,112
24/2/2002	276,600	276,600	276,600	276,600	276,600	276,600
25/2/2002	276,420	276,600	276,600	276,432	276,520	276,354
26/2/2002	276,200	276,420	276,420	276,234	276,420	276,164
27/2/2002	275,940	276,200	276,200	275,995	276,140	275,936

TABELA 0.8 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque residual</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo os três torques simultaneamente</b>
12/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13/2/2002	0,020	0,020	0,044	0,000	0,020
14/2/2002	0,010	0,010	0,031	0,000	0,022
15/2/2002	0,000	0,400	0,021	0,000	0,028
16/2/2002	-0,020	-0,020	0,005	0,000	0,029
17/2/2002	-0,040	-0,040	-0,008	0,000	0,033
18/2/2002	-0,050	-0,050	-0,008	0,010	0,048
19/2/2002	-0,060	-0,060	-0,006	0,010	0,065
20/2/2002	-0,070	-0,070	-0,001	0,020	0,081
21/2/2002	-0,080	-0,080	0,006	0,010	0,096
22/2/2002	-0,090	-0,090	0,014	0,000	0,108
23/2/2002	-0,100	-0,100	0,023	0,000	0,118
24/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25/2/2002	-0,180	-0,180	-0,012	-0,100	0,066
26/2/2002	-0,220	-0,220	-0,034	-0,220	0,036
27/2/2002	-0,260	-0,260	-0,055	-0,200	0,004
<b>Média do erro</b>	-0,071	-0,046	0,001	-0,029	0,047
<b>Desvio Padrão</b>	0,084	0,144	0,024	0,075	0,038

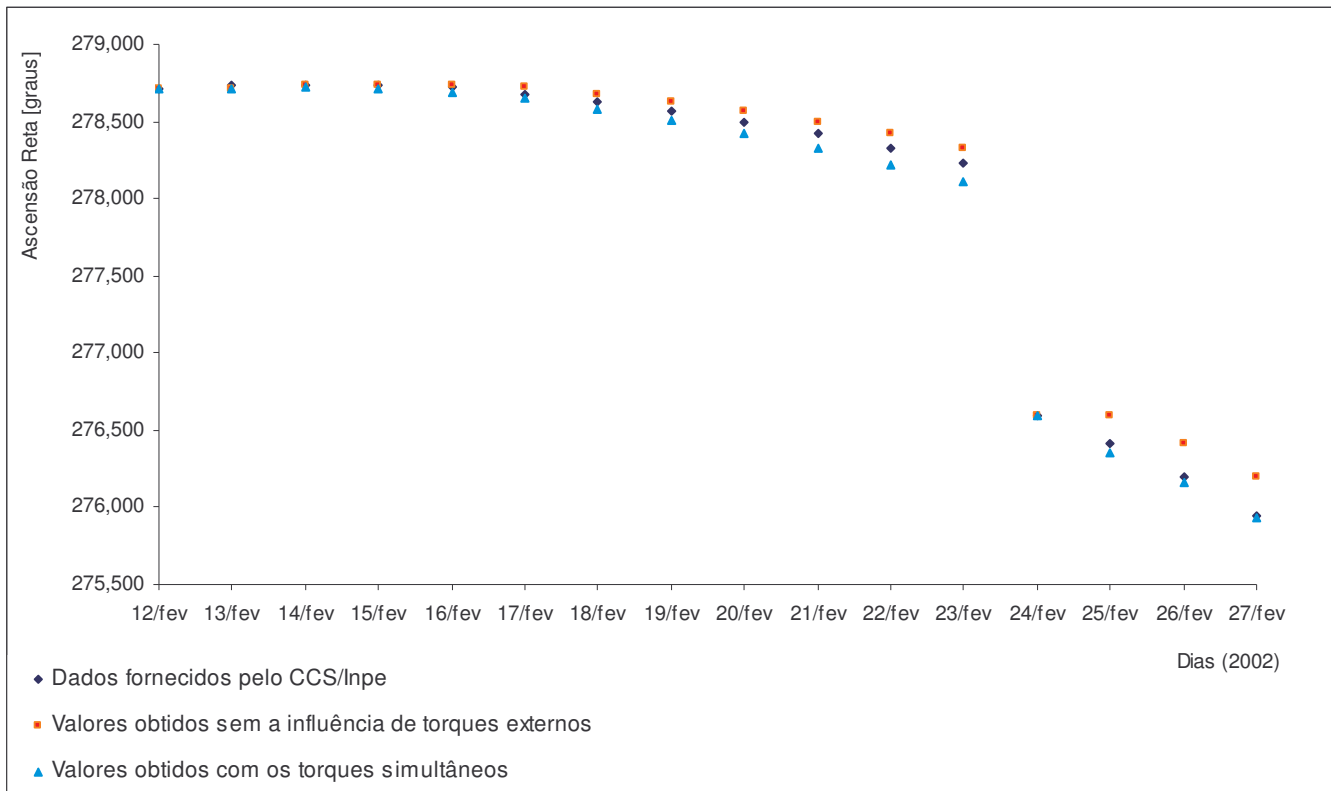


FIGURA 2.11 - Evolução da ascensão reta do satélite SCD2 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

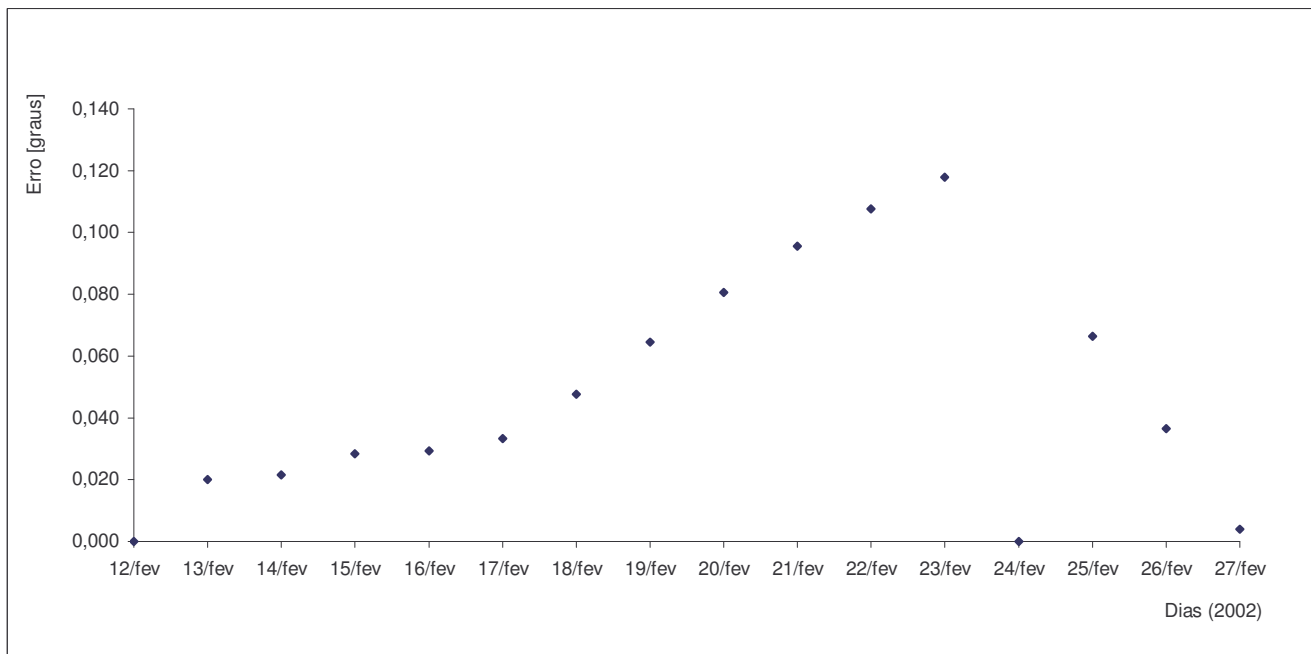


FIGURA 2.12 - Variação do erro para a ascensão reta do satélite SCD2, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

### 2.7.2.2 Resultados para a Declinação

TABELA 0.9 - Variações da declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Declinação [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
12/2/2002	63,470	63,470	63,470	63,470	63,470	63,470
13/2/2002	63,450	63,470	63,470	63,492	63,440	63,467
14/2/2002	63,420	63,450	63,450	63,457	63,420	63,430
15/2/2002	63,390	63,420	63,420	63,412	63,380	63,383
16/2/2002	63,360	63,390	63,390	63,367	63,360	63,338
17/2/2002	63,330	63,360	63,360	63,322	63,330	63,295
18/2/2002	63,310	63,330	63,330	63,278	63,300	63,254
19/2/2002	63,290	63,310	63,310	63,244	63,290	63,223
20/2/2002	63,270	63,290	63,290	63,212	63,270	63,195
21/2/2002	63,250	63,270	63,270	63,181	63,260	63,169
22/2/2002	63,240	63,250	63,250	63,152	63,240	63,144
23/2/2002	63,230	63,240	63,240	63,134	63,230	63,130
24/2/2002	61,220	61,220	61,220	61,220	61,220	61,220
25/2/2002	61,030	61,220	61,220	61,105	61,220	61,110
26/2/2002	60,830	61,030	61,030	60,912	61,040	60,919
27/2/2002	60,620	60,830	60,830	60,711	60,840	60,719

TABELA 1.0 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe					
Dias	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
12/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13/2/2002	-0,020	-0,020	-0,042	0,010	-0,017
14/2/2002	-0,030	-0,030	-0,037	0,000	-0,010
15/2/2002	-0,030	-0,030	-0,022	0,010	0,007
16/2/2002	-0,030	-0,030	-0,007	0,000	0,022
17/2/2002	-0,030	-0,030	0,008	0,000	0,035
18/2/2002	-0,020	-0,020	0,032	0,010	0,056
19/2/2002	-0,020	-0,020	0,046	0,000	0,067
20/2/2002	-0,020	-0,020	0,058	0,000	0,075
21/2/2002	-0,020	-0,020	0,069	-0,010	0,081
22/2/2002	-0,010	-0,010	0,088	0,000	0,096
23/2/2002	-0,010	-0,010	0,096	0,000	0,100
24/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25/2/2002	-0,190	-0,190	-0,075	-0,190	-0,080
26/2/2002	-0,200	-0,200	-0,082	-0,210	-0,089
27/2/2002	-0,210	-0,210	-0,091	-0,220	-0,099
<b>Média do erro</b>	-0,053	-0,052	0,002	-0,037	0,015
<b>Desvio Padrão</b>	0,074	0,074	0,059	0,084	0,064



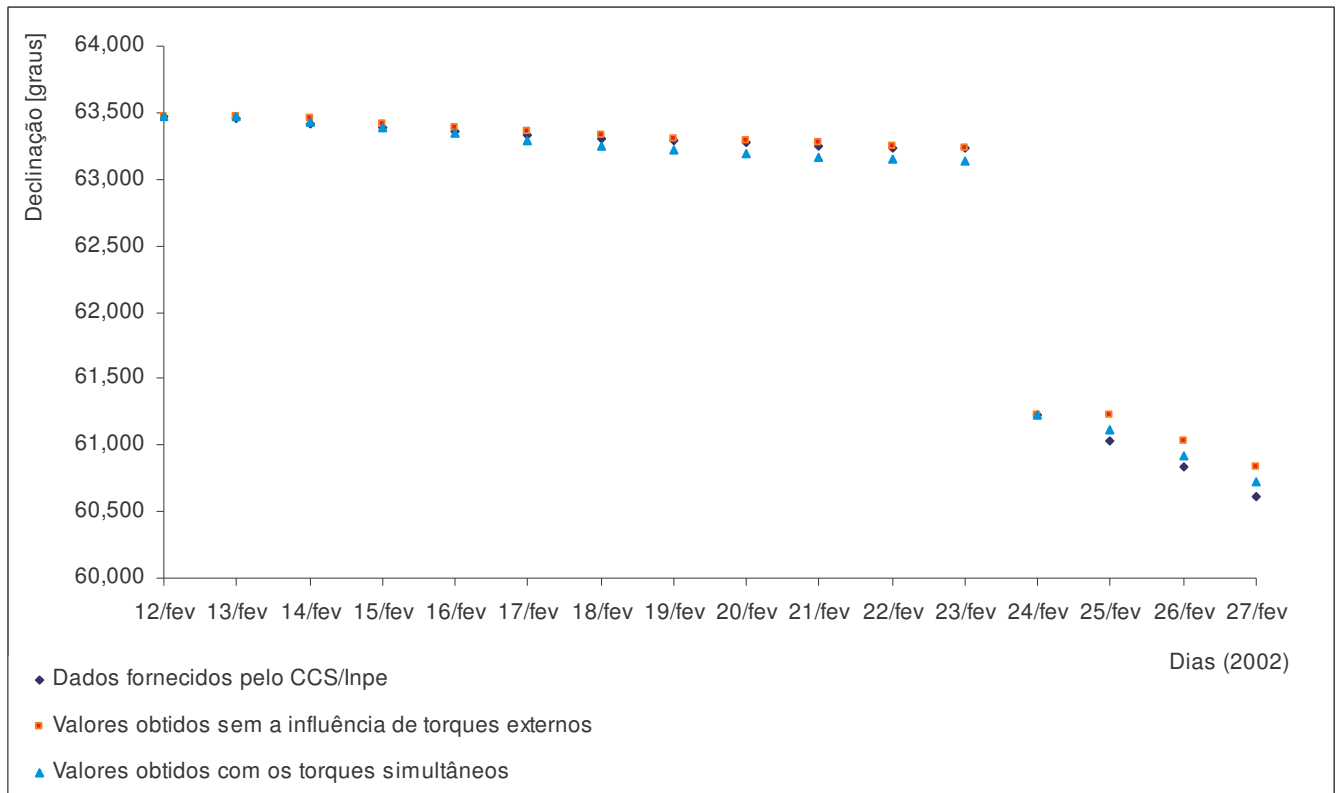


FIGURA 2.13 - Evolução da declinação do satélite SCD2 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

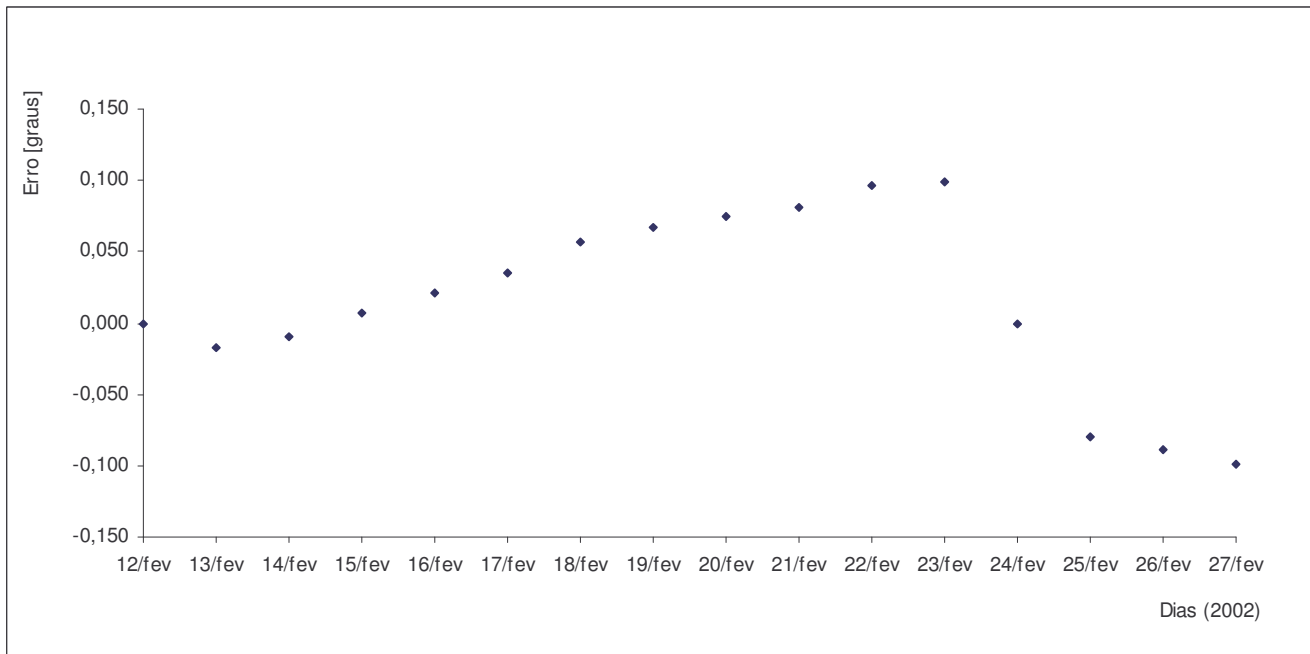


FIGURA 2.14 - Variação do erro para a declinação do satélite SCD2, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

### 2.7.2.3 Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação

TABELA 1.1 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Velocidade de Rotação [rpm]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque residual	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo os três torques simultaneamente
12/2/2002	34,480	34,480	34,480	34,480	34,480	34,480
13/2/2002	34,420	34,480	34,480	34,480	34,430	34,432
14/2/2002	34,370	34,420	34,420	34,420	34,370	34,370
15/2/2002	34,310	34,370	34,370	34,370	34,310	34,317
16/2/2002	34,260	34,310	34,310	34,310	34,260	34,256
17/2/2002	34,200	34,260	34,260	34,260	34,200	34,204
18/2/2002	34,140	34,200	34,200	34,200	34,140	34,144
19/2/2002	34,080	34,140	34,140	34,140	34,080	34,082
20/2/2002	34,020	34,080	34,080	34,080	34,020	34,022
21/2/2002	33,960	34,020	34,020	34,020	33,960	33,961
22/2/2002	33,900	33,960	33,960	33,960	33,900	33,902
23/2/2002	33,830	33,900	33,900	33,900	33,840	33,843
24/2/2002	33,690	33,690	33,690	33,690	33,690	33,690
25/2/2002	33,690	33,690	33,690	33,690	33,690	33,639
26/2/2002	33,550	33,700	33,690	33,690	33,640	33,643
27/2/2002	33,480	33,620	33,550	33,550	33,510	33,508

TABELA 1.2 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque residual</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo os três torques simultaneamente</b>
12/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	-0,010	-0,012
14/2/2002	-0,050	-0,050	-0,050	0,000	0,000
15/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,007
16/2/2002	-0,050	-0,050	-0,050	0,000	0,004
17/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,004
18/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,004
19/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,002
20/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,002
21/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,001
22/2/2002	-0,060	-0,060	-0,060	0,000	-0,002
23/2/2002	-0,070	-0,070	-0,070	-0,010	-0,013
24/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,051
26/2/2002	-0,150	-0,140	-0,140	-0,090	-0,093
27/2/2002	-0,140	-0,070	-0,070	-0,030	-0,028
<b>Média do erro</b>	-0,059	-0,054	-0,054	-0,009	-0,007
<b>Desvio Padrão</b>	0,041	0,034	0,034	0,023	0,028

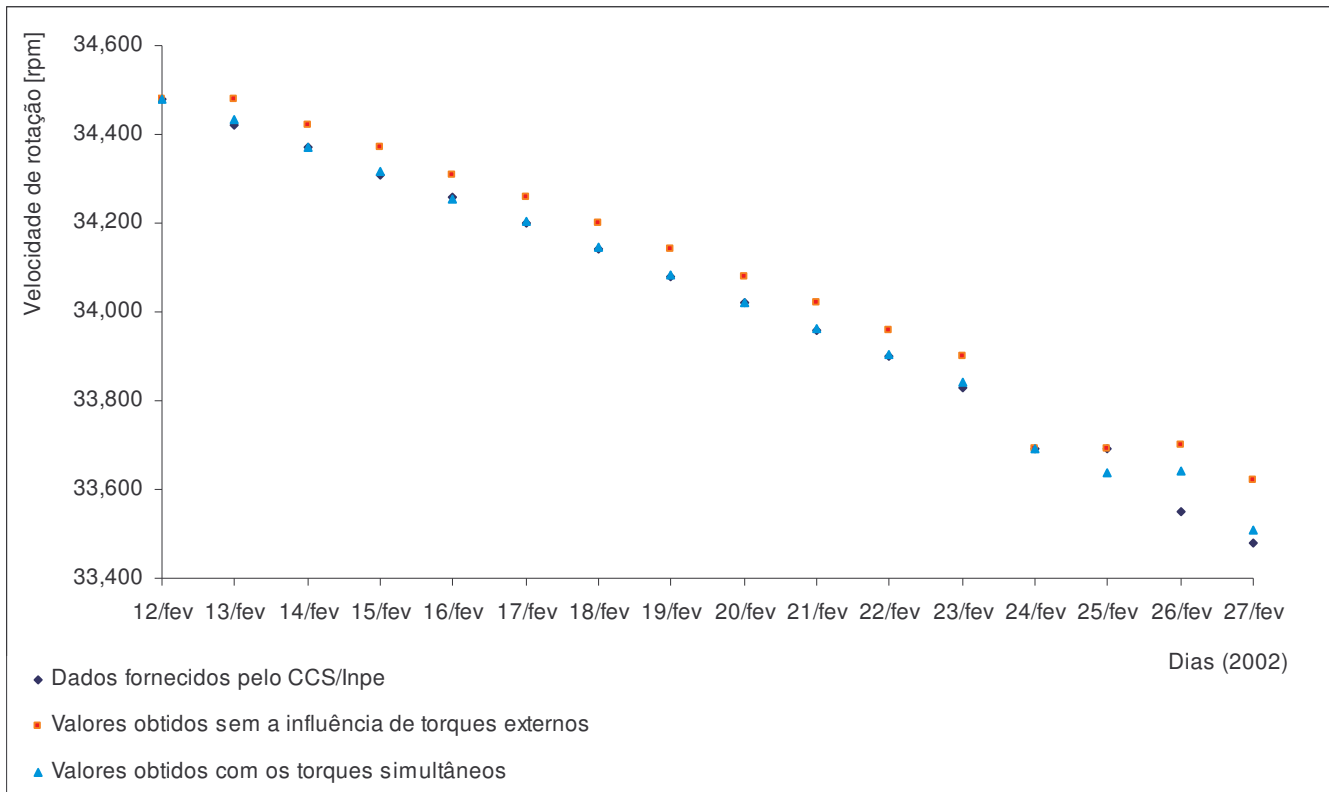


FIGURA 2.15 - Evolução do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

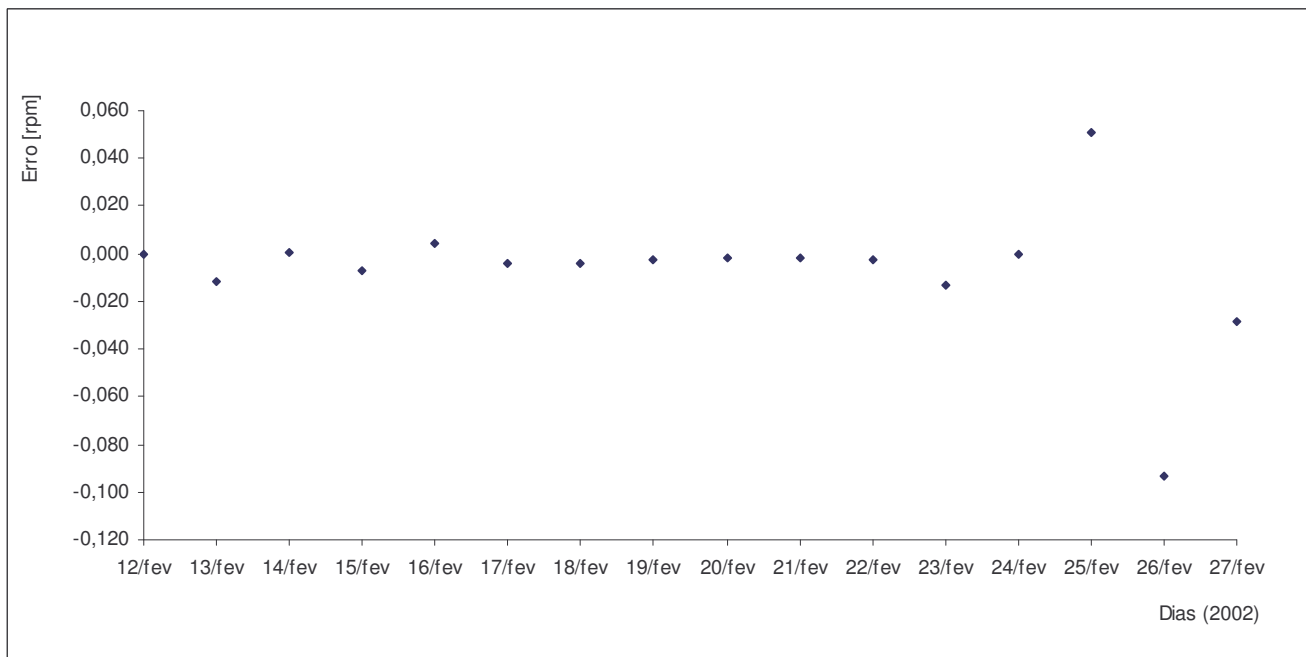


FIGURA 2.16 - Variação do erro para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2, incluindo os torques simultaneamente em função dos dias.

### 2.7.3 Simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2

TABELA 1.3 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2.

Dias	Ascensão reta [graus]		Declinação [graus]		Módulo da velocidade de rotação [rpm]	
	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos da simulação
13/2/2002	278.730	278.710	63.450	63.467	34.420	34.432
14/2/2002	278.740	278.698	63.420	63.447	34.370	34.381
15/2/2002	278.740	278.669	63.390	63.410	34.310	34.328
16/2/2002	278.720	278.619	63.360	63.359	34.260	34.275

TABELA 1.4 - Diferença entre os resultados obtidos da simulação e os dados do CCS/Inpe.

Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe			
Dias	Ascensão reta [graus]	Declinação [graus]	Módulo da velocidade de rotação [rpm]
13/2/2002	0,020	-0,017	-0,012
14/2/2002	0,042	-0,027	-0,011
15/2/2002	0,071	-0,020	-0,018
16/2/2002	0,101	0,001	-0,015

## CAPÍTULO 3

### CONCLUSÃO

Neste trabalho foram analisadas as influências conjuntas do torque de gradiente de gravidade, torque residual e torque devido às correntes de Foucault na atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação, utilizando os quatérnions para descrever a atitude. Os resultados foram apresentados em termos das variações da magnitude da velocidade de rotação, da ascensão reta e declinação do eixo de rotação. As equações foram integradas numericamente pelo método de Runge-Kutta de 8ª ordem em termos das variações dos quatérnions e das componentes da velocidade de rotação, e em seguida determinados os comportamentos da velocidade de rotação e da ascensão reta e declinação do eixo de rotação.

Pelos resultados verifica-se, primeiramente que os três torques em conjunto, com suas componentes somadas algebricamente, descrevem bem o comportamento da ascensão reta, declinação e módulo da velocidade de rotação do satélite.

Temos de uma maneira geral que essa soma algébrica teve efeito positivo, quando os três torques contribuíram para o decaimento da ascensão reta, declinação e módulo da velocidade, isso é verificado pela melhora dos resultados obtidos, ou seja, valores mais próximos dos valores fornecidos pelo CCS/Inpe para determinado dia. Por outro lado um determinado torque que veio a influenciar negativamente uma das três variáveis, quando teve seu efeito somado em conjunto com os demais acabou por influenciar negativamente os resultados.

Deve-se ressaltar que essa soma de torques gerou menor variabilidade nos resultados, de uma maneira geral, apesar de alguns torques não contribuírem para o decaimento das variáveis em alguns dias, e a média tendeu a ser menor com algumas exceções devido principalmente à interação conjunta dos torques.

O satélite SCD1 em particular ofereceu bons resultados para o módulo da velocidade de rotação, ficando com a menor das médias de erro e com um dos menores desvios padrões, isso é verificado quando se observa as figuras 2.9 e 2.10 e a tabela 0.6, de uma maneira geral os resultados obtidos se aproximaram bem mais dois reais na abordagem conjunta de torques.

O satélite SCD2 é o que apresentou melhores resultados para as três variáveis em questão. A ascensão reta apresentou um dos menores desvios padrões, logo a variabilidade tendeu a diminuir. Dentro das abordagens, a abordagem conjunta é a que gerou um dos menores erros médios para as 3 variáveis e um dos menores desvios para a declinação, apesar da influência negativa de alguns torques em alguns dias do período estudado.

O módulo da velocidade de rotação para o satélite SCD2, foi o que melhor apresentou resultados nesta fase do projeto, em que teve o menor dos erros médios e um dos menores desvios padrões. Isso pode ser observado nas tabelas 1.1 e 1.2 e nas figuras 2.15 e 2.16.

Observando a figura 2.16 fica evidente que o erro esteve próximo de zero durante um bom período até a ação de controle do CCS.

Com os resultados obtidos da simulação sem atualização para o satélite SCD2, fica claro primeiramente que o erro ao passar dos dias parece tender a aumentar, apesar de o período propagado ser de poucos dias, isso, no entanto, não é claro para a declinação cujo erro diminui. No entanto, a ordem de grandeza dos erros obtidos é pequena e dentro da precisão requerida pelo INPE. Leva-se em conta que apenas dois parâmetros magnéticos do satélite são atualizados no transpassar dos dias, pois, aqui não se trabalha com modelos de variação para os mesmos. Deste modo a abordagem sem atualização poderia ser utilizada para um número maior de dias.

De maneira geral nota-se que a influência conjunta dos torques externos, leva a resultados com menores médias ou pelo menos com menor variabilidade, mesmo abordando-se a influência de apenas três torques, isso leva a crer que a inclusão de mais parcelas de outros torques deva levar a resultados ainda melhores. Esse é o enfoque do trabalho que dá continuidade a este projeto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, S. C. **Propagação analítica de atitude de satélites estabilizados por rotação: Torque Residual Médio com Modelo de Quadripolo para o Campo Geomagnético**, Dissertação de Mestrado, Dinâmica Orbital e Planetologia Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2002.

ASSIS, S. C.; ZANARDI, M.C. **Torque Magnético Residual Médio com Modelo de Quadripolo**, In: Jornada de Iniciação Científica e Pós-graduação, 2003, Guaratinguetá, **Anais...**, Guaratinguetá, 2003. CD-ROM.

BATE, R.R.; MULLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. Ed. Dover Publications, INC. 1971.

BROUWER, O.; CLEMENCE, G.M. **Methods of celestial mechanics**, New York: Academic Press, 1961.

KAPLAN, M. H., **Modern spacecraft dynamics & control**, New York: John Wiley, 1976.

QUIRELLI, I. M. P. **Propagação de Atitude de Satélites Estabilizados por Rotação**, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia, UNESP - Guaratinguetá, SP, 2002.

SHUSTER, M.D., **A survey of attitude representation**, Journal of Astron. Sciences, v. 41, 4, 1993.

RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações**. Relatório Final do PIBIC/CNPq, FEG/UNESP, Guaratinguetá, 2002.

RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações**. Relatório Final do PIBIC/CNPq, FEG/UNESP, Guaratinguetá, 2003.

RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da atitude de satélites artificiais com quatérnions e torque magnético residual**, Anais da Jornada de Iniciação Científica e Pesquisa da FEG/UNESP, 2004.

SENE, L. T. F.; **Propagação da Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions incluindo Torques Magnéticos e Torque Gradiente de Gravidade**, Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, PIBIC, CNPq, INPE, São José dos Campos, 2006.

TEIXEIRA, J. E. C. T., **Propagação Numérica da Atitude de Satélites Artificiais com Torque Magnético devido às correntes de Foucault e Quatérnions**, Trabalho de Graduação, Faculdade de Engenharia, UNESP – Guaratinguetá, SP, 2005.

THOMAS, L. C.; CAPPELARI, J. O., **Attitude determination and prediction of spin-stabilized satellites**, The Bell System Technical Journal, July, 1964.



User's Guide - **MATLAB Edition for Students**, MAT WORKS Inc, Massachusetts, USA, 1995.

WERTZ, J. R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**, Kluwer Academic Publishers, 1978.

ZANARDI, M. C., **Dinâmica da Atitude de Satélites Artificiais**, Tese de Livre Docência, FEG/UNESP, Guaratinguetá, 2005.

ZANARDI, M. C.; RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions e Torque Gradiente de Gravidade**, Anais do DINCON 2004, 1831 - 1846, Ilha Solteira-SP, 2004.